Oppgaver MAT4640 - V11 - 08.03.2011

Uke 10

I stedenfor å gi denne oppgaven som en del av det obligatoriske oppgavesettet, gir jeg den som ukeoppgave med ekstra lang forberedelsestid.

Definisjon

Et *filter* på ω er en familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ slik at

i) $\omega \in \mathcal{F} \wedge \emptyset \notin \mathcal{F}$.

ii) $X \in \mathcal{F} \wedge Y \in \mathcal{F} \Rightarrow X \cap Y \in \mathcal{F}$.

iii) $X \in \mathcal{F} \wedge X \subseteq Y \subseteq \omega \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$

Hvis vi i tillegg har at $X \in \mathcal{F} \vee (\omega \setminus X) \in \mathcal{F}$ for alle $X \subseteq \omega$, så sier vi at $\mathcal{F}$ er et *ultrafilter*.

Oppgave 1

Vis at det finnes et ultrafilter $\mathcal{F}$ på ω hvor alle $X \in \mathcal{F}$ er uendelige.
(Dette er en standard konsekvens av utvalgsaksiomet.)

For resten av dette settet, lar vi $\mathcal{F}$ være ultrafilteret fra Oppgave 1.

Definisjon

La V^ω være klassen av alle funksjoner med ω som definisjonsområde.
Vi definerer relasjonene $\equiv$ og E på V^ω ved

$$f \equiv g \Leftrightarrow \{k \in \omega \mid f(k) = g(k)\} \in \mathcal{F}.$$

$$f \; E \; g \Leftrightarrow \{k \in \omega \mid f(k) \in g(k)\} \in \mathcal{F}.$$

Oppgave 2

Vis at vi ikke kan ha at $f \equiv g$ og $f\ E\ g$ samtidig.

Hvis Φ er et utsagn i språket til mengdelæren, lar vi Φ^* være utsagnet vi får ved å

- Erstatte alle forekomster av $=$ med $\equiv$.
- Erstatte alle forekomster av $\in$ med E.
- Erstatte alle kvantorer $\exists x$ og $\forall x$ med $\exists x \in V^\omega$ resp. $\forall x \in V^\omega$.

Hvis $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ er et utsagn med fri variable blant $x_1, \ldots, x_n$ og $f_1, \ldots, f_n$ er fra V^ω, sier vi at

$$V^\omega \models \Phi(f_1, \ldots, f_n)$$

når $\Phi^*(f_1, \ldots, f_n)$ holder.

Oppgave 3

La $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ være et utsagn med høyst $x_1, \ldots, x_n$ fri og la $f_1, \ldots, f_n$ være fra V^ω.
Bruk induksjon på oppbygningen av Φ til å vise at følgende er ekvivalente:

1. $V^\omega \models \Phi(f_1, \ldots, f_n)$.
2. $\{k \mid V \models \Phi(f_1(k), \ldots, f_n(k))\} \in \mathcal{F}$.

Oppgave 4

Vis at det finnes en følge $\{f_n\}_{n \in \omega}$ fra V^ω slik at vi for alle $n \in \omega$ har at

- $V^\omega \models f_n$ er et ordinaltall.
- $f_{n+1}\ E\ f_n$

Drøft hva dette betyr for forholdet mellom vår matematiske intuisjon og det vi kan aksiomatisere.

Dag Normann