Oppgaver MAT4640 - V11 - 01.02.2011

Uke 5

Ettersom vi ikke rekker frem til ordinaltallsaritmetikken i løpet av Uke 4, hentes ingen av oppgavene fra læreboka denne gangen.
Det er ikke meningen at alle oppgavene skal kunne løses innen rammen av det fragmentet av mengdelæren vi har presentert så langt.
Det vil være en fordel å kjenne til *tellbarhet*, men for ordens skyld:

Definisjon

En mengde A er *tellbar* hvis A er endelig eller hvis det finnes en bijeksjon mellom $\mathbb{N}$ of A.

Oppgave 1

La R være en total ordning på en mengde A.
Vis at det finnes en største delmengde B av A slik at B er et velordnet initialt segment, det vil si

$$b \in B \wedge aRb \rightarrow a \in B.$$

Oppgave 2

Vis at hvis α er et grenseordinaltall, så finnes det en strengt voksende følge $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ av ordinaltall i α som er ubegrenset i α.

Oppgave 3

La $A \subseteq \mathbb{R}$ være velordnet under den vanlige ordningen $<$ av $\mathbb{R}$.
Vis at A er tellbar.
Omvendt, vis at om A er tellbar og R er en velorning på A, så finnes det $B \subseteq \mathbb{R}$ slik at $\langle A, R\rangle$ og $\langle B, <\rangle$ er isomorfe.

Oppgave 4

La α være et ordinaltall, og la X være mengden av strengt fallende sekvenser i α.

a) Vis at hvert element i X er en endelig sekvens.

b) Vis at den leksikografiske ordningen av X er en velordning.

Dag Normann