Klasser, det analytiske hierarkiet og Shoenfields absolutthetsteorem

Dag Normann*

Oktober 1998

1 Klasse-hierarkiet

1.1 Syntaks-klasser

Vi skal begynne med noe kjent og kjært:

Definisjon 1 Vi vil se på språket til mengdelæren utvidet med konnektivene $\vee$, $\forall$ og begrensede kvantorer $\exists x \in y$ og $\forall x \in y$. Vi lar fortsatt $\rightarrow$ og $\leftrightarrow$ være definerte symboler.
En Δ_0-formel vil da være en formel i dette utvidete språket hvor vi ikke bruker de ubegrensede kvantorene $\exists x$ og $\forall x$.

Det er rene makelighetsgrunner til at vi utvider språket på denne måten.

Vi husker at en klasse strengt tatt er en definerende formel hvor vi tillater bruk av parametre. En klasse vil da være en Δ_0-klasse om den definerende formelen er ekvivalent til en Δ_0-formel.

Vi skal fravike Kunen på et punkt til. Vi vil operere med klasser i flere dimensjoner, det vil si at vi ser på definerende formler med flere fri variable.

Definisjon 2 Vi definerer hierarkiet av formler som følger:

1. En formel Φ er Π_0 eller Σ_0 hvis og bare hvis Φ er Δ_0.
2. Φ er Σ_{n+1} hvis $\Phi = \exists x_i \Psi$ hvor Ψ er Π_n.
3. Φ er Π_{n+1} hvis $\Phi = \forall x_i \Psi$ hvor Ψ er Σ_n.

Definisjon 3 En klasse er Π_n hvis den definerende formelen er ekvivalent til en Π_n-formel.
En klasse er Σ_n hvis den definerende formelen er ekvivalent til en Σ_n-formel.
En klasse er Δ_n hvis den er både Σ_n og Π_n.

Vi skal være mest interesserte i $n = 0$ og $n = 1$, men vil gi en liten smak på studiet av de generelle klassene.

*Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

1.2 Tillukningsegenskaper

For å avgjøre om en klasse tilhører en av kategoriene Σ_n og Π_n kan man skrive det definerende utsagnet på preneks normalform. Så lenge det finnes minst en ubegrenset kvantor, vil første kvantor bestemme om utsagnet er et Π-utsagn eller et Σ-utsagn.
Som vi skal se, kan vi glemme alle begrensede kvantorer.
Vi kan også betrakte sekvenser av ubegrensede kvantorer av samme type som en kvantor. Metoden for å skrive om et preneks-utsagn til et Π_n-utsagn eller et Σ_n-utsagn vil være å følge følgende omskrivningsregler:

Lemma 1 *Følgende overganger leder til bevisbart ekvivalente utsagn:*

1. $\exists x \exists y$ *erstattes med* $\exists z \exists x \in z \exists y \in z$.
2. $\forall x \in z \exists y$ *erstattes med* $\exists u \forall x \in z \exists y \in u$.
3. $\forall x \forall y$ *erstattes med* $\forall z \forall x \in z \forall y \in z$.
4. $\exists x \in z \forall y$ *erstattes med* $\forall u \exists x \in z \forall y \in u$.

Bevis
1. er en konsekvens av paringsaksiomet, 2. er en konsekvens av replacement. 3. og 4. følger fra 1. og 2. ved utsagnslogikk.
Når det gjelder bruk av replacement-aksiomet vil vi i forcing-delen vise at vi kan erstatte replacement-skjemaet med følgende aksiom-skjema

$$\forall x \in u \exists y \Phi(x, y) \rightarrow \exists v \forall x \in u \exists y \in v \Phi(x, y)$$

og med denne varianten blir 2. lett å vise.
Dette nye skjemaet er tilsynelatende sterkere enn det opprinnelige replacement-skjemaet. Det er imidlertid ikke vanskelig å vise alle instanser av dette alternative aksiomskjemaet fra gammeldags replacement, noe vi her overlater som en oppgave.

Leseren kan selv finne overgangsregler for utsagn av typen $\exists x \in z \exists y$ og $\forall x \in z \forall y$.
Dette gir det vi trenger for å vise følgende:

Teorem 1 *Hvis $n > 0$ vil familien av Σ_n-klasser være lukket under snitt, union, begrensede kvantorer og ubegrensede eksistenskvantorer.*
Tilsvarende vil familien av Π_n-klasser være lukket under snitt, union, begrensede kvantorer og ubegrensede allkvantorer.

Definisjon 4 En klasse-funksjon F er en klasse $F(\vec{x}) = y$ som oppfyller $\forall \vec{x} \exists ! y F(\vec{x}) = y$.
Vi sier at F er Σ_1, Δ_1 etc. om relasjonen $F(\vec{x}) = y$ er Σ_1 etc.

Lemma 2

1. *Hvis F er en Σ_1-klassefunksjon, så er F en Δ_1-funksjon.*

2. *Sammensetningen av funksjoner som er Δ_1 er selv Δ_1.*

3. *Hvis F er Δ_1 og G er definert fra F ved transfinit rekursjon, så er også G en Δ_1-funksjon.*

Bevis Vi viser dette for funksjoner av en variabel.

1. La $F(x) = y$ hvis og bare hvis $\exists z \Phi(x, y, z)$, hvor Φ ikke har ubegrensede kvantorer.
   Da vil
   $$F(x) = y \Leftrightarrow \forall z \forall u (\Phi(x, u, z) \rightarrow u = y).$$
   Denne omskrivningenen er bare gyldig om $\forall x \exists ! y \exists z \Phi(x, y, z)$.

2. Sammensetningen av to Σ_1-relasjoner er opplagt Σ_1, så vi kan bruke del 1.

3. Hvis vi går tilbake til hvordan vi definerte G fra F (både når vi foretar transfinit rekursjon over ON og over V), så bruker vi en eksistens-kvantor, den som uttrykker at det finnes en lokal løsning av rekursjonslikningen.

Et viktig spesialtilfelle er at vi kan bruke konstanter som har en Δ_1-definisjon i Δ_1-klasser uten at vi bryter ut av denne kategorien. Vi kan også bruke Δ_1-predikater i en Δ_1-kontekst uten å bryte ut.

Oppgave La
$$OP(x, y) = \{\{x, y\}, \{x\}\}.$$
La $R \subseteq V \times V$ være en klasse.
La
$$S = \{OP(x, y) \mid (x, y) \in R\}.$$
Vis at for alle n er R en Σ_n-klasse hvis og bare hvis S er en Σ_n-klasse. Vis det tilsvarende for Π_n.

Hvis vi går konstruksjonen av L nærmere etter i sømmene vil vi se at vi nå har vist det vi trenger for følgende:

Korolar 1 *Funksjonen $L(\alpha)$ er Δ_1 og L er en Σ_1-klasse.*

Bevis
$L(\alpha)$ sett som funksjon er bygget opp ved gjentatt bruk av transfinit rekursjon, konstanten ω, paringsfunksjonen og andre greit definerbare ingredienser. Det gir at funksjonen er Δ_1.
Da kan vi definere $x \in L \Leftrightarrow \exists \alpha \in ON(x \in L(\alpha))$, som gir Σ_1-formen.

1.3 Universelle mengder

Vi har vist hvordan vi kan presse mange aktuelle konstruksjoner inn i Δ_1. Vi skal nå se at dette hierarkiet av klasser vi har definert er et skikkelig hierarki. Vi skal vise dette ved å vise at det finnes universelle klasser for både Σ_n og Π_n, slik at disse klassene ikke er lukket under komplement. For å gjennomføre dette, trenger vi en Gödelnummerering av Δ_0-formlene:

Definisjon 5 Dette er en definisjon som ikke direkte er innenfor språket til ZF. For hvert par n og k av naturlige tall skal vi definere en Δ_0-formel $\phi_{n,k}(x_1, \ldots, x_k)$ som følger

1. Hvis $n = 2^0 3^i 5^j$ og $1 \leq i, j \leq k$, la $\phi_{n,k}$ være $x_i = x_j$.
2. Hvis $n = 2^1 3^i 5^j$ og $1 \leq i, j \leq k$, la $\phi_{n,k}$ være $x_i \in x_j$.
3. Hvis $n = 2^2 3^i 5^j$, la $\phi_{n,k}$ være $\phi_{i,k} \vee \phi_{j,k}$.
4. Hvis $n = 2^3 3^i 5^j$, la $\phi_{n,k}$ være $\phi_{i,k} \wedge \phi_{j.k}$.
5. Hvis $n = 2^4 3^i$, la $\phi_{n,k}$ være $\neg\phi_{i,k}$.
6. Hvis $n = 2^5 3^i 5^j$ og $i \leq k$, la $\phi_{n,k}$ være $(\exists x_{k+1} \in x_i)\ \phi_{j,k+1}$.
7. Hvis $n = 2^6 3^i 5^j$ og $i \leq k$, la $\phi_{n,k}$ være $(\forall x_{k+1} \in x_i)\ \phi_{j,k+1}$.
8. Hvis n ikke er på formen over, la $\phi_{n,k}$ være $x_1 = x_1$.

Merk at definisjonen av Δ_0 ikke tillater at vi lukker et utsagn fullstendig, det vil alltid være minst en fri variabel. Vi vil derfor alltid ha at $k \geq 1$ i konstruksjonen over.

Selv om definisjonen over ikke kan utføres formelt i mengdeteori-språket, så kan vi bruke denne aritmetiseringen til å definere sannhets-predikatet for generelle Δ_0-utsagn:

Definisjon 6 La $Pred(n, k, < a_1, \ldots, a_k >)$ hvis og bare hvis $\phi_{n,k}(a_1, \ldots, a_k)$.

Lemma 3 *Pred er definerbar i mengdelæren på en Δ_1-måte.*

Bevis
La a være en transitiv mengde. Da definerer vi funksjonen
$F(n, k, < a_1, \ldots, a_k >) = 0$ om $\phi_{n,k}(a_1, \ldots, a_k)$.
$F(n, k, < a_1, \ldots, a_k >) = 1$ om $\neg\phi_{n,k}(a_1, \ldots, a_k)$.
ved rekursjon over n uniformt i $< a_1, \ldots, a_k > \in a^k$. Siden F er definert ved rekursjon, vil F være Δ_1 uniformt i a. Det gir at $Pred$ er Δ_1.

Dette gir oss følgende

Teorem 2 *La $k \geq 0$ være gitt.*
Det finnes en Σ_1-klasse Φ_k av aritet $k+1$ slik at alle Σ_1-klasser Ψ av aritet k kan beskrives som

$$\Psi(\vec{x}) \Leftrightarrow \Phi_k(n, \vec{x})$$

for en $n \in \omega$.

Bevis
La

$$\Phi_k(x, \vec{x}) \Leftrightarrow \exists y \; Pred(x, k, \vec{x}).$$

Korolar 2 *For hver familie Γ hvor Γ er Π_n eller Σ_n, og for hver $k \in \mathbb{N}$ finnes det Φ i Γ av aritet $k+1$ slik at det for alle Ψ i Γ med aritet k finnes m slik at*

$$\forall \vec{x}(\Psi(\vec{x}) \leftrightarrow \Phi(n, \vec{x})).$$

Bevis
La $\vec{Q}\vec{y}$ være kvantorprefixet felles for alle Γ-klassene. La

$$\Phi(x, \vec{x}) = \vec{Q}\vec{y}Pred(x, \vec{x}, \vec{y})$$

hvor vi bruker Σ_1-formen eller Π_1-formen til $Pred$ tilpasset siste kvantor i $\vec{Q}$.

Ved et vanlig diagonaliseringsargument finner vi for alle n en Π_{n+1}-mengde (Σ_{n+1}-mengde) inneholdt i $\mathbb{N}$ som ikke er Σ_n (Π_n). Dette vil gi oss at vi har et ekte hierarki av familier av mengder (og klasser).

1.4 Absolutthet over de hereditært tellbare mengdene

Vi minner om at HC, *De hereditært tellbare mengdene*, utgjør de mengdene hvor den transitive tillukningen er tellbar.

Teorem 3 *Alle Σ_1-utsagn og Π_1-utsagn er absolutte for HC.*
Alle overgangene i Lemma 2 leder til ekvivalente formler også når de tolkes over HC.

Bevis
For den første delen er det nok å vise absolutthet for Σ_1-utsagn, siden familien av de absolutte formlene er lukket under negasjon.
La $\Phi(\vec{x}) = \exists x \Psi(x, \vec{x})$ hvor Ψ er Δ_0.
La $\vec{a}$ være elementer i HC. Hvis $\Phi(\vec{a})$ holder i HC, vil trivielt $\Phi(\vec{a})$ holde i V.
Hvis $\Phi(\vec{a})$ holder i V, la α være et ordinaltall slik at $\Phi(\vec{a})$ holder i $R(\alpha)$. La M være en tellbar, elementær delstruktur av $R(\alpha)$ slik at den transitive tillukningen til $\vec{a}$ er en delmengde av M, og la M_0 være Mostowski-kollapset til M via isomorfien m.
Vi har at $m(\vec{a}) = \vec{a}$, og $\Phi(\vec{a})$ holder i M, så $\Phi(\vec{a})$ holder i M_0. Siden M_0 er en delstruktur av HC, vil også $\Phi(\vec{a})$ holde i HC.

I beviset for overgangene i Lemma 2 brukte vi paringsaksiomet og replacement. HC er en modell for begge disse aksiomene.

2 Det analytiske hierarkiet

I dette avsnittet skal vi se på en tosortig struktur bestående av $\mathbb{N}$ og $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
Uten at vi skal beskrive et spesifikt språk, skal vi anta at vi kan snakke om ulikheter på $\mathbb{N}$, addisjon, multiplikasjon og eksponensiering og generell applikasjon $f(a)$ fra $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ til $\mathbb{N}$.
Skal vi være presise kan vi utforme et språk slik at alle primitivt rekursive funksjoner kan uttrykkes som termer i dette språket.
Vi kan anta at dette språket "oversettes" til språket for mengdelæren, slik at alle utsagn i vårt nye språk er å oppfatte som utsagn i mengdelæren.

Definisjon 7

1. Et Δ^1_0-utsagn er et utsagn som ikke har noen kvantorer over $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Av bekvemmelighetsgrunner vil vi kalle klassen for Π^1_0 eller Σ^1_0 hvis det passer oss bedre.
2. Et Σ^1_{k+1}-utsagn er på formen $\exists f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \Phi$ hvor Φ er Π^1_k
3. Et Π^1_{k+1}-utsagn er på formen $\forall f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \Phi$, hvor Φ er Σ^1_k.
4. En delmengde av $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ kalles Σ^1_k resp. Π^1_k hvis den kan defineres ved en tilsvarende formel.
   Hvis en mengde er både Π^1_k og Σ^1_k, kalles den Δ^1_k.

Bemerkning 1 Alle disse klassene har en relativisert variant, varianten hvor vi tillater parametere fra $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ i definisjonen.
Et klassisk teorem av Suslin fra 1917 sier at relativisert Δ^1_1 er det samme som Borell. Dette skal ikke vi komme inn på.

På samme måte som for hierarkiet av klasser, består dette mengdehierarkiet av familier med rimelig sterke tillukningsegenskaper.

Definisjon 8 La $< n, m >= \frac{1}{2}((n+m)^2 + 3n + m)$ være den tradisjonelle bijeksjonen fra $\mathbb{N}^2$ til $\mathbb{N}$.

1. Hvis f og g er to funksjoner, la $< f, g > (n) =< f(n), g(n) >$.
2. Hvis $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ er en følge av funksjoner, la $< f_i >_{i \in \mathbb{N}} (< j, m >) = f_j(m)$.

Disse operasjonene definerer bijeksjoner fra $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^2$ til $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ og fra $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ til $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
Det er tilsvarende enkelt å beskrive en bijeksjon fra $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ til $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
Disse kodingsteknikkene gjør at vi kan trekke sammen kvantorer av samme type og skyve tallkvantorer inn og forbi funksjonskvantorer.
For eksempel kan

$$\forall n \exists f \Phi(n, f)$$

erstattes med

$$\exists f \forall n \Phi(n, f_n)$$

hvor $f_n(m) = f(< n, m >)$.
Vi skal ikke gå i detalj her men slå fast at vi skissemessig har argumentert for

Teorem 4 *Klassen av Σ^1_k-mengder for $k > 0$ er lukket under snitt, union, tall-kvantorer og eksistensielle funksjons-kvantorer.*
Klassen av Π^1_k-mengder for $k > 0$ er likeledes lukket under snitt, union, tall-kvantorer og universelle funksjons-kvantorer.

Det er en omforming til som vi skal se på; vi kan også bruke en funksjonskvantor til å "spise opp" tallkvantorer som står innenfor.

Lemma 4 *Utsagnene $\forall n \exists m \Phi(n,m)$ og $\exists g \forall n \Phi(n, g(n))$ er ekvivalente.*

Den ene veien lar vi $g(n)$ velge en aktuell m og den andre veien er triviell.
Det man ofte ikke ser like umiddelbart er at negasjonene, etter at de er bragt på preneks normalform, også er ekvivalente. Dette innebærer at universelle tallkvantorer inne i et prefiks kan bringes ut og forbi en eksistensiell tallkvantor uten å øke kompleksiteten, forutsatt at det finnes en universell funksjonskvantor ytterst.
Disse betraktningene gir oss følgende:

Teorem 5 *Ethvert Π^1_1-utsagn er ekvivalent til et utsagn på formen*

$$\Phi(\vec{x}) = \forall f \exists n R(f, n, \vec{x})$$

hvor R er definerbar i et rimelig stort språk ved hjelp av begrensede kvantorer. (Vi trenger ikke mere kompleksitet enn det eksponent-funksjonen gir oss.)

Vi skal gi en anvendelse av dette teoremet i avsnitt 4.

3 HC versus $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

3.1 Koding av HC

I dette avsnittet skal vi se på kompleksiteten av HC og kompleksiteten av delmengder av $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definerbare over HC.

Definisjon 9 La $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. f definerer en relasjon R_f på $\mathbb{N}$ ved

$$nR_f m \Leftrightarrow f(< n, m >) = 0.$$

Definisjon 10 La $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Vi lar $f \in C$ (C for 'kode') om R_f er velfundert.
Hvis $f \in C$, lar vi $\rho(n, f) = \{\rho(m, f) \ ; \ mR_f n\}$ være definert ved rekursjon, og vi lar $\rho(f) = \rho(0, f)$.

Lemma 5 *En mengde x er i HC hvis og bare hvis den er på formen $\rho(f)$ for en $f \in C$.*

Bevis
Det er lett å se at $\rho(f) \in HC$ når $f \in C$. Omvendt, la $x \in HC$ og la $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ være en opptelling av $\{x\} \cup trcl(x)$ slik at $x = x_0$.
La $f(< n, m >) = 0$ hvis og bare hvis $x_n \in x_m$. Da er $f \in C$ og $x = \rho(f)$.

Dette innebærer at utsagn om HC kan oversettes til utsagn om C. For å kunne dra noen nytte av det må vi se på kompleksiteten av C og av tolkningen til atomære utsagn over HC oversatt til C.

Teorem 6 *C er Π^1_1.*

Bevis
Velfunderthet er det samme som

$$\forall g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \exists n \in \mathbb{N}(f(< g(n+1), g(n) >) \neq 0.$$

Ettersom vi har kodet samme element i HC med svært forskjellige elementer

i C er det ikke gitt at atomære utsagn oversettes på noen enkel måte. Det er faktisk ikke engang sant.

Lemma 6 *Det finnes to Σ^1_1 formler $\Sigma_\in$ og $\Sigma_=$ og to Π^1_1-formler $\Pi_\in$ og $\Pi_=$ slik at for alle f og g i C:*

$$\rho(f) \in \rho(g) \Leftrightarrow \Sigma_\in(f, g) \Leftrightarrow \Pi_\in(f, g)$$

og

$$\rho(f) = \rho(g) \Leftrightarrow \Sigma_=(f, g) \Leftrightarrow \Pi_=(f, g).$$

Bevis
Vi definerer relasjonen $I(V, f, g)$ hvor V er en binær relasjon på $\mathbb{N}$, f og g er funksjoner, ved $I(V, f, g)$ hvis og bare hvis

$$\forall n \forall m[V(n, m) \leftrightarrow$$

$$\forall i \exists j(f(< i, n >) = 0 \rightarrow g(< j, m >) = 0 \wedge V(i, j)) \wedge$$
$$\forall j \exists i(g(< j, m >) = 0 \rightarrow f(< i, n >= 0 \wedge V(i, j))].$$

Det vi uttrykker er at V oppfyller rekursjonslikningen om vi definerer likhet ved en rekursiv definisjon. Det finnes derfor V som oppfyller disse relasjonene. På den annen side, om $I(V, f, g)$ og f of g er i C, vil V være entydig bestemt. Dette ser vi ved induksjon på ordinaltallsrank i de velfunderte relasjonene R_f og R_g. Det gir oss:

1. La $\Sigma_=(f, g) = \exists V(I(V, f, g) \wedge V(0, 0))$
2. La $\Sigma_\in(f, g) = \exists V \exists n(I(V, f, g) \wedge V(0, n) \wedge g(< n, 0 >) = 0)$
3. La $\Pi_=(f, g) = \forall V(I(V, f, g) \rightarrow V(0, 0))$
4. La $\Pi_\in(f, g) = \forall V(I(V, f, g) \rightarrow \exists n V(0, n) \wedge g(< n, 0 >) = 0)$

Lemma 7 *La $f \in C$ og $n \in \mathbb{N}$.*
Da finnes det en funksjon $(f)_n$ rekursiv i f og n slik at $(f)_n \in C$ og $\rho((f)_n) = \rho(n, f)$.

Bevis
Vi definerer $g = (f)_n$ som følger:

- $g(\langle m, 0\rangle) = f(\langle m, n\rangle)$.
- $g(\langle m, n\rangle) = 1$ for alle m.
- $g(\langle m, k\rangle) = f(\langle m, k\rangle)$ for $k \neq 0, n$.

Egennskapen verifiseres da lett.

Teorem 7 *Hvis $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ er Σ_1 definerbar , så er A en Σ^1_2-mengde.*

Bevis
La $f \in A \Leftrightarrow \exists x_0 \phi(x_0, f)$ hvor ϕ er Δ_0. Vi har allerede vist at A er Σ_1-definerbar over HC ved den samme definisjonen.
For hver $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ kan vi finne en $c(f) \in C$ slik at $\rho(c(f)) = f$ på en rekursiv (eller i det minste definerbar) måte.
Den universelle eksistenskvantoren $(\exists x_0 \in HC)\ \Phi(x_0, f)$ oversettes til $\exists f_0(f_0 \in C \wedge \hat{\Phi}(f_0, c(f))$, hvor $\hat{\Phi}$ er en videre oversettelse av Φ som beskrevet under. Alle mengdevariable x_i erstattes med funksjonsvariable f_i. Vi antar for enkelthets skyld at vi ikke binder den samme variabelen på to steder.
Atomære utsagn som forkommer positivt Φ erstattes med hhv. $\Pi_{\in}$ og $\Pi_{=}$, mens atomære utsagn som forekommer negativt erstattes med $\Sigma_{\in}$ hhv. $\Sigma_{=}$.
En begrenset kvantor $\exists x_i \in x_j$ kan oversettes til

$$\exists n(f_j(\langle n, 0\rangle) = 0 \wedge f_i = (f_j)_n).$$

På denne måten vil $f \in A$ kunne skrives på formen

$$f \in A \Leftrightarrow \exists f(f_0 \in C \wedge \hat{\Phi}(f_0, c(f)))$$

hvor $\hat{\Phi}$ er et Π^1_1-utsagn.
Dette avslutter beviset.

Omvendingen gjelder faktisk også, enhver Σ^1_2-mengde er Σ_1-definerbar over HC. Det vil vi se på i avsnitt 4.

3.2 Velordninger av continuumet når $V = L$

Vi har vist at hvis $V = L$, så holder utvalgsaksiomet. Vi har også vist at continuumshypotesen holder under antagelsen om at $V = L$. En konsekvens av dette beviset er følgende

Lemma 8 *Hvis $V = L$, vil $HC = L(\aleph_1)$.*

Vi definerte velordningen av L ved hjelp av en transfinit rekursjon, hvor ingrediensene i konstruksjonen er bruk av begrensede kvantorer, definerbare konstanter som ω og andre transfinite rekursjoner. Hvis vi går tilbake til Lemma 2, punkt 3, får vi

Lemma 9 *Hvis $V = L$, finnes det en Δ_1 velordning av universet.*

Korolar 3 *Hvis $V = L$, finnes det en Δ^1_2-velordning av $\mathbb{N}^\mathbb{N}$.*

Bevis
Vi har vist at enhver Σ_1 relasjon på $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ er Σ^1_2, og da vil enhver Π_1-relasjon på $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ være Π^1_2. Korollaret følger.

En konsekvens av dette er at hvis vi bruker utvalgsaksiomet til å konstruere uskjønne delmengder av $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, som for eksempel mengder som ikke er Lebesgue-målbare, så kan vi finne Δ^1_2-mengder med disse egenskapene hvis vi antar at $V = L$.
Vi har flere eksempler på følgende:

Fenomen *Hvis vi kan bevise at en mengde er Δ^1_2 så kan vi bevise at den er pen, men vi kan ikke bevise at alle Δ^1_2-mengder er pene.*

Dette fenomenet antyder en grense for hvor langt vi kan presse pene egenskaper hvor moteksemplene bygger på utvalgsaksiomet. Vi skal ikke utdype dette nærmere.

4 Shoenfields absolutthetsteorem

Π^1_1-mengder og Σ^1_2-mengder er definerte ved hjelp av funksjonskvantorer, og det er i utgangspunktet liten grunn til å tro at disse definisjonene er absolutte for mengder eller klasser hvor vi har få funksjoner. I dette avsnittet skal vi vise at det skal lite til for at en Π^1_1 definisjon er absolutt, og hvis vi har en klasse-modell for ZF, så vil også alle Σ^1_2-definisjoner være absolutte.

Lemma 10 *Hvis $A \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ er Π^1_1, så er A Σ_1-definerbar.*

Bevis
La $g \in A \Leftrightarrow \forall f \exists n R(g, f, n)$ hvor vi bare bruker begrensede kvantorer og termer for primitivt rekursive funksjoner og relasjoner i R.
En konsekvens er at $R(f, g, n)$ kan avgjøres ut fra endelig kjennskap til f og g. Det finnes derfor en definerbar relasjon $S(\sigma, \tau, n)$ hvor $S(\sigma, \tau, n)$ utrykker at σ og τ inneholder nok informasjon om enhver utvidelse f og g til å avgjøre $R(f, g, n)$.
La $\tau =< a_0, \dots, a_{k-1} >$.
La $T_g(\tau) \Leftrightarrow \forall n \leq k \neg S(< f(0), \dots, f(k-1) >, \tau, n)$.
T_g er et tre av endelige sekvenser, og T_g vil være uten uendelige grener hvis og bare hvis $g \in A$.
Det at T_g er uten uendelige grener er det samme som å si at treet er velfundert, og da kan vi definere en ordinaltallsrang.
Dette gir oss

$$g \in A \Leftrightarrow \exists \phi : T_g \to ON(\forall \sigma, \tau \in T_g \forall i(\sigma = \tau i \to \phi(\sigma) < \phi(\tau)))$$

som er den ønskede Σ_1-form.

Korolar 4 *Alle Σ^1_2-delmengder av $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ er Σ_1-definerbare.*

Bevis
Den ekstra eksistenskvantoren over $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ kan slåes sammen med eksistenskvantoren over HC vi bruker i Σ_1-beskrivelsen av Π^1_1-kjernen.

Hvis vi har en transitiv modell M for det fragmentet av mengdelæren som skal til for å bevise at rangfunksjonen ϕ finnes, så vil alle Π^1_1-utsagn være absolutte over M. Allkvantoren i den opprinnelige Π^1_1-definisjonen bevares nedover, mens den nye eksistenskvantoren bevares oppover. Slike modeller kalles ofte β-modeller.
Vi har representert Π^1_1-utsagn som at visse trær er velordnet. Vi skal se at vi kan gjøre noe tilsvarende med Σ^1_1-utsagn:

Definisjon 11 La A være Π^1_1, og la T_g være det treet vi så på i beviset for Lemma 10.
For hvert ordinaltall α og for hver funksjon $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definerer vi et tre $D_{\alpha,g}$ av endelige sekvenser av ordinaltall $< \alpha$ ved
$(\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}) \in D_{\alpha,g} \Leftrightarrow \forall i, j < k($ hvis $\sigma_i \in T_g$ og $\sigma_j \in T_g$ og σ_i er en utvidelse av σ_j, så er $\alpha_i < \alpha_j)$.

Her koder vi ikke de ordnede sekvensene. Poenget er at sekvensen $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1})$ lokalt ser ut som en rangfunksjon for T_g, og treet $D_{\alpha,g}$ vil ha en uendelig gren hvis og bare hvis det virkelig finnes en slik rangfunksjon. Det er det samme som at T_g er velfundert og α er større eller lik ordinaltallsrangen til T_g.
Dette gir oss

Lemma 11 *$g \notin A \Leftrightarrow (\forall \alpha \in ON)\ D_{\alpha,g}$ er velfundert.*

Lemma 12 *For alle $g \in L$ og ordinaltall α, så er $D_{\alpha,g} \in L$.*

Dette viser vi ved å se på definisjonen av $D_{\alpha,g}$ som bare avhenger av T_g og α selv. Resten er absolutt.

La nå $B \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ være Π^1_2. Vi skal se at medlemskap i B også kan reduseres til at alle trær i en gitt absolutt klasse er velfunderte. En viktig observasjon i den forbindelse er at for å avgjøre om $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1})$ er i $D_{\alpha,g}$, så trenger vi bare å kjenne til endelig mye om g, nemlig så mye som vi trenger for å avgjøre om $\sigma_i \in T_g$ for $i < k$.

Definisjon 12 La $f \in B \Leftrightarrow \forall h(< f, h > \notin A)$ hvor A er Π^1_1 som over.
For $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ og $\alpha \in ON$, la
$E_{\alpha,f} = \{((a_0, \ldots, a_{k-1}), (\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1})) \mid$
$(\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}) \in D_{\alpha,(<f(0),a_0>,\ldots,<f(k-1),a_{k-1}>)}\}$.

Elementene i $E_{\alpha,f}$ er par av sekvenser, og vi ordner $E_{\alpha,f}$ ved omvendt parvis sekvensutvidelse. En uendelig gren i $E_{\alpha,f}$ vil gi en funksjon h og en uendelig gren i $D_{\alpha,<f,h>}$, og omvendt, så vi har følgende:
$f \in B \Leftrightarrow \forall h(< f, h > \notin A) \Leftrightarrow \forall h \forall \alpha D_{\alpha,<f,h>}$ er velfundert $\Leftrightarrow$

$\forall\alpha E_{\alpha,f}$ er velfundert.
Vi ser videre at hvis $f \in L$, så er definisjonen av $E_{\alpha,f}$ absolutt, så $E_{\alpha,f} \in L$.
Dette gir oss det meste vi trenger for

Teorem 8 *Ethvert* Π^1_2*-utsagn er absolutt for* L*.*

Bevis
Siden velfunderthet er absolutt for L vil utsagnet

$$(\forall\alpha \in ON)\ E_{\alpha,f} \text{ velfundert}$$

være absolutt for L. Men dette uttrykker jo medlemskap i en Π^1_2-mengde.

Korolar 5 (Shoenfields Absolutthetsteorem)
Ethvert Σ^1_2*-utsagn er absolutt for enhver transitiv modell* M *for* ZF *hvor* $ON \subset M$*.*