Utvalgsaksiomet, velordningsprinsippet og Zorns lemma

Dag Normann
Universitetet i Oslo
Matematisk Institutt
Boks 1053 - Blindern
0316 Oslo

13. mars 2007

I dette notatet skal vi gi et bevis for ekvivalensen mellom utvalgsaksiomet, velordningsprinsippet og Zorns lemma. Ettersom notatet supplerer pensum i emnet MAT 4610 *Aksiomatisk mengdelære*, vil vi kommentere hvor et par aksiomer fra ZFC brukes. Lesere som ønsker å lese bevisene som en standard matematisk tekst, kan se bort fra disse bemerkningene.
Vi nummererer teoremer, lemmaer etc. fortløpende, mens påstandene følger en egen nummerering. En påstand vil normalt inngå som en del av et bevis for et lemma eller et teorem, og kan ikke forståes ut av sin sammenheng.

Vi bruker begrepene *partiell ordning* og *total ordning* i betydningen *mindre enn*, det vil si at de er irrefleksive:

Definisjon 1 La R være en relasjon på en mengde A.

a) R er en *partiell ordning* hvis

- $\forall a \in A \neg(aRa)$
- $\forall a, b, c \in A(aRb \wedge bRc \rightarrow aRc)$

b) En partiell ordning er *total* hvis vi i tillegg har

$$\forall a, b \in A(aRb \vee a = b \vee bRa).$$

c) Hvis vi erstatter $\neg(aRa)$ med

$$aRb \wedge bRa \Leftrightarrow a = b$$

sier vi at R er en *refleksiv ordning*.

d) Hvis R er en ordning på en mengde A og $B \subseteq A$ sier vi at $a \in A$ er en *øvre skranke for B* hvis $bRa \vee b = a$ for alle $b \in B$.

Definisjon 2 La R være en total ordning på en mengde A.
Vi sier at R *velordner* A hvis alle ikke-tomme mengder $X \subseteq A$ har et R-minste element

Vi skal se på ekvivalensen av følgende tre utsagn:

Utvalgsaksiomet [AC]

La $\{A_i\}_{i \in I}$ være en indisert familie av ikke-tomme mengder.
Da finnes det en *utvalgsfunksjon* f definert på indeksmengden I slik at $f(i) \in A_i$ for alle $i \in I$.

Velordningsprinsippet [WO]

La A være en mengde.
Da finnes det en velordning R av A.

Zorns lemma [ZORN]

La A være en mengde og R en partiell ordning på A.
Anta at hver gang $B \subseteq A$ er totalt ordnet under R, så har B en øvre skranke i A.
Da finnes det et R-maksimalt element i A.

Vi skal vise at utvalgsaksiomet, velordningsprinsippet og Zorns lemma er ekvivalente, og at ekvivalensen er bevisbar i ZF, dvs mengdelære uten utvalgsaksiomet.

1 Zorns lemma impliserer utvalgsaksiomet

La $\{A_i\}_{i\in I}$ være en indeksert familie av ikketomme mengder. Vi skal bruke Zorns lemma til å vise at det finnes en utvalgsfunksjon f definert på I slik at $f(i) \in A_i$ for alle $i \in I$.
Vi skal la X være mengden av delvis vellykkede forsøk på å lage en slik utvalgsfunksjon. Mer presist lar vi $\langle J, g\rangle \in X$ hvis $J \subseteq I$ og g er en funksjon definert på J slik at $g(j) \in A_j$ for alle $j \in J$.
La $\sqsubseteq$ være den refleksive ordningen på X definert ved at

$$\langle J_1, g_1\rangle \sqsubseteq \langle J_2, g_2\rangle$$

når $J_1 \subseteq J_2$ og $g_1(j) = g_2(j)$ for alle $j \in J_1$.

Påstand 1 *Premissen i Zorns lemma holder for $\langle X, \sqsubseteq\rangle$.*

Bevis
La $\{\langle J_y, g_y\rangle \mid y \in Y\}$ være en totalt ordnet delmengde av X.
La $J = \bigcup_{y\in Y} J_y$ og la $g(j) = g_y(j)$ når $j \in J_y$.
Valg av y spiller ingen rolle, for hvis vi velger y og z slik at

$$\langle J_y, g_y\rangle \sqsubseteq \langle J_z, g_z\rangle$$

vil $g_z(j) = g_y(j)$, og siden vår utvalgte delmengde av X er totalt ordnet under $\sqsubseteq$ vil vi for alle valg av y og z ha ulikheten over, eller den omvendte. Det betyr at $\langle J, g\rangle \in X$ er en øvre skranke for $\{\langle J_y, g_y\rangle\}_{y\in Y}$, så påstanden er vist.

Ved konklusjonen i Zorns lemma har vi da et maksimalt element $\langle J, g\rangle \in X$.

Påstand 2 *$J = I$ og g er en utvalgsfunksjon for $\{A_i\}_{i\in I}$.*

Bevis
Pr. definisjon av X er g en utvalgsfunksjon for $\{A_j\}_{j\in J}$, så det er nok å vise at $I = J$.
Hvis $i \in I \setminus J$, har vi $a \in A_i$ og vi utvider J til J' ved å legge til i og g til g' ved å la $g(i) = a$. Da får vi en ekte utvidelse av $\langle J, g\rangle$ i X, noe som er i konflikt med maksimaliteten av $\langle J, g\rangle$. Derfor må $I = J$, og påstanden er vist.

Vi har nå vist følgende:

Teorem 3 *Zorns lemma impliserer utvalgsaksiomet.*

Bemerkning 4 For å konstruere X i beviset over, har vi brukt at vi kan forme potensmengden til I og til $\{\langle i, a\rangle \mid a \in A_i\}$, men vi har ikke brukt replacement i noen dramatisk forstand.

2 Velordningsprinsippet impliserer Zorns lemma

I dette beviset benytter vi oss av *transfinit rekursjon*, et prinsipp som blir diskutert grundig i MAT 4610. Prinsippet sier at hvis vi har en velordning, så kan vi definere funksjoner ved rekursjon over denne velordningen. Det vi gjør er å formulere en *rekursjonslikning*, bruker velordningen til å slå fast at det ikke finnes et minste punkt hvor likningen kan ha flertydig løsning og prinsipper for mengdeeksistens til å vise at det finnes en løsning.

La A med den partielle ordningen R oppfylle betingelsene i Zorns lemma.
La $\prec$ være en velordning av A. Vi definerer mengden B som den eneste mengden $B \subseteq A$ som oppfyller

$$a \in B \Leftrightarrow \forall b \in A(b \in B \wedge b \prec a \rightarrow bRa)$$

for alle $a \in A$.
Intuitivt arbeider vi oss oppover A langs $\prec$, og hver gang vi finner et element a som er en øvre skranke for de vi har tatt med i B så langt, så tar vi også a med i B. Eksempelvis vil det $\prec$-minste elementet a_0 være i B. Det $\prec$ nest minste elementet a_1 er med i B hvis a_0Ra_1, ellers ikke. For hver $a \in A$ kan vi som en induksjonsantagelse anta at $B \cap \{b \in A \mid b \prec a\}$ er entydig bestemt, og da har vi at om $a \in B$ eller ikke er bestemt ved ekvivalensen over.
Konstruksjonen av B er slik at $\prec$ og R er sammenfallende på B, så B er totalt ordnet under R. Da har B en øvre skranke b. Hvis det nå finnes en c slik at bRc er også c en øvre skranke for B, og spesielt for $\{a \in B \mid a \prec c\}$. Definisjonen av B tilsier da at $c \in B$, hvilket er i konflikt med at b, og vi har jo at bRc, er en øvre skranke for B.
Dette betyr at b er R-maksimal i A, og beviset er avsluttet. Argumentet over gir oss et bevis for

Teorem 5 *Velordningsprinsippet impliserer Zorns lemma.*

Bemerkning 6 I dette beviset har vi brukt transfinit rekursjon, som krever bruk av replacementaksiomet. Vi har ikke brukt potensmengdeaksiomet her.

3 Utvalgsaksiomet impliserer velordningsprinsippet

I dette avsnittet skal vi gjøre bruk av følgende fakta om velordninger:

Lemma 7 *a) La $\langle A, R\rangle$ og $\langle B, S\rangle$ være isomorfe velordninger. Da er isomorfien entydig bestemt.*

b) La $\langle A, R\rangle$ og $\langle B, S\rangle$ være to velordninger. Da gjelder nøyaktig én av tre:

1. *$\langle A, R\rangle$ og $\langle B, S\rangle$ er isomorfe.*
2. *$\langle A, R\rangle$ er isomorf med et ekte initialsegment av $\langle B, S\rangle$.*
3. *$\langle B, S\rangle$ er isomorf med et ekte initialsegment av $\langle A, R\rangle$*

Begge disse satsene blir bevist i *Kunen*, a) er lett og b) er heller ikke veldig vanskelig.

La nå X være en vilkårlig mengde. Intuisjonen bak beviset for velordningsprinsippet er at vi konstruerer en velordning av X ved først å velge ut et vilkårlig element, så et vilkårlig element til osv. Vi fortsetter med denne prosessen til det ikke er flere elementer igjen i X.
Vi skal bruke utvalgsaksiomet til å gjøre det vilkårlige utplukket mulig:

I hele dette avsnittet, la f være en funksjon slik at vi for alle delmengder $Y \subseteq X$ har at $f(Y) \in X \setminus Y$ når $X \setminus Y \neq \emptyset$.

Vi kan da si mere presist hva vi mener med en delvis suksessfull oppfølging av intuisjonen vår:

Definisjon 8 En f-streng er et par $\langle A, R\rangle$ hvor $A \subseteq X$ og R er en velordning av A som oppfyller

$$\forall a \in A(a = f(\{b \in A \mid bRa\})).$$

Bemerkning 9 Hvis $\langle A, R\rangle$ er en ikketom f-streng og a_0 er det R-minste elementet i A, ser vi at $a_0 = f(\{b \in A \mid bRa\}) = f(\emptyset)$. Dette viser at det minste elementet er felles for alle f-strenger. For alle de f-strengene som har et nest minste element a_1 må vi da ha at

$$a_1 = f(\{b \in A \mid bRa_1\}) = f(\{a_0\}).$$

Det nest miste elementet er derfor også felles. Vi skal vise at dette fenomenet vil fortsette, også i de tilfellene hvor vi går ut over de endelige nivåene.

Påstand 3 *Et initialsegment av en f-streng er en f-streng.*

Bevis
Hvis $\langle B, S\rangle$ er et initialsegment av $\langle A, R\rangle$ og $a \in B$, så er

$$\{b \in B \mid bSa\} = \{b \in A \mid bRa\}.$$

Da er

$$a = f(\{b \in A \,|\, bRa\}) = f(\{b \in B \,|\, bSa\}).$$

Påstanden følger umidelbart.

Påstand 4 *La $\langle A, R\rangle$ og $\langle B, S\rangle$ være to f-strenger, og la g være en isomorfi mellom initialsegmenter av strengene. Da er g identitetsfunksjonen på sitt definisjonsområde.*

Bevis
Anta ikke. La a være det R-minste elementet i A hvor $g(a) \neq a$, og la $b = g(a)$.
Da er g identitetsfunksjonen på $\{c \in A \mid cRa\}$, og fordi g er en isomorfi med $g(a) = b$, er

$$\{d \in B \mid dSb\} = \{g(c) \mid c \in A \wedge cRa\} = \{c \in A \mid cRa\}.$$

Siden både $\langle A, R\rangle$ og $\langle B, S\rangle$ er f-strenger, følger det at

$$a = f(\{c \in A \mid cRa\}) = f(\{d \in B \mid dSb\}) = b,$$

noe som er i konflikt med forutsetningene. Dermed er påstanden bevist.

Påstand 5 *La $\langle A, R\rangle$ og $\langle B, S\rangle$ være to f-strenger. Da er de enten like, eller så er den ene et initialt segment av den andre.*

Bevis
Ved Lemma 7 b) er de enten isomorfe, eller den ene er isomorf til et initialsegment av den andre. Ved påstandene 3 og 4 er isomorfien i de tre tilfellene en identitet, og denne påstanden følger.

En konsekvens av påstand 5 er at mengden av f-strenger er totalt ordnet ved

$$\langle B_1, S_1 \rangle \prec \langle B_2, S_2 \rangle$$

om den første er et initialsegment av den andre. Det følger at unionen A av alle B'ene med unionen R av alle S'ene blir en total ordning, hvor hver f-streng $\langle B, S \rangle$ er et (ikke nødvendigvis ekte) initialsegment. Spesielt vil R være en total ordning på A.

Påstand 6 *$\langle A, R \rangle$ er en f-streng.*

Bevis
Vi må først vise at R velordner A:
La $X \subseteq A$ være ikketom. La $\langle B, S \rangle$ være en f-streng slik at $X \cap B \neq \emptyset$.
La a være det S-minste elementet i $B \cap X$.
Siden $\{b \in B \mid bSa\} = \{b \in A \mid bRa\}$ vil a være det R-minste elementet i X.
Det at et slikt R-minste element finnes, viser at R velordner A.

Vi viser så f-streng egenskapen. La $a \in A$ og la $\langle B, S \rangle$ være en f-streng slik at $b \in B$. Da er

$$a = f(\{b \in B \mid bSa\}) = f(\{b \in S \mid bRa\}),$$

som viser f-strengegenskapen for $\langle A, R \rangle$. Dette avslutter beviset for påstanden.

Her utnytter vi igjen at $\langle B, S \rangle$ er et initialsegment av $\langle A, R \rangle$ og at $\langle B, S \rangle$ er en f-streng.

Påstand 7 *Mengden A konstruert i forrige påstand vil utgjøre hele X og R vil følgelig være en velordning av X.*

Bevis
Hvis $A \neq X$, la $a = f(A)$. La $B = A \cup \{a\}$ og definer utvidelsen S av R ved å la bSa for alle $b \in A$. Da er $\langle B, S \rangle$ en f-streng som ekte utvider $\langle A, R \rangle$, og det er pr. definisjon av A og R umulig. Altså holder ikke antagelsen om at A er en ekte delmengde av X, og påstanden er vist.

Samlet gir argumentene i dette avsnittet oss et bevis for

Teorem 10 *Utvalgsaksiomet impliserer velordningsprinsippet.*

Bemerkning 11 Vi ser at vi trenger å bruke utvalgsaksiomet på nesten hele potensmengden til X, så vi trenger potensmengdeaksiomet i dette beviset.

4 Sluttkommentar

Vi har vist at relativt til ZF er de tre prinsippene AC, WO og ZORN ekvivalente. Hvis vi imidlertid ser på hvor stort fragment av ZF vi trenger for å vise hver av de seks implikasjonene, blir bildet litt anderledes.
Komprehensjonsaksiomet er brukt i alle de seks bevisene.
For å vise AC fra WO, trenger vi egentlig ikke mer, mens for å vise WO fra AC bruker vi potensmengdeaksiomet på en sentral måte.
Begge bevisene som tar utgangspunkt i ZORN bruker potensmengdeaksiomet, og uten potensmengdeaksiomet reduseres Zorns lemma til et ganske harmløst utsagn.
Beviset for ZORN fra AC er det mest komplekse av de seks, men det er ikke nødvendig med mer enn potensmengdeaksiomet og komprehensjon.
I beviset for ZORN fra WO brukte vi transfinit rekursjon. Her er potensmengdeaksiomet unødvendig.
Ut fra denne uformelle analysen kan vi si at AC er den svakeste av disse påstandene, WO den sterkeste og med ZORN et uklart sted i mellom. Disse synspunktene kan selvfølgelig være gjenstand for diskusjon, dellvis fordi naiv bruk av replacement ikke er tatt med i vurderingen. Vi har bare sett på replacement som middel til å vise transfinit rekursjon.