Fasit for eksamen i MEK1100 gitt 13 desember 2012

Oppgave 1

1a $\boldsymbol{v} = \nabla\phi = \boldsymbol{k} \times \nabla\psi = \nabla \times (-\psi\boldsymbol{k}) = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$

$v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$

$v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x}$

$\nabla\phi \cdot \nabla\psi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$

Vinkelen er rett dersom vi ikke befinner oss i et stagnasjonspunkt. I et stagnasjonspunkt kan vinkelen være vilkårlig.

1b (se oppgave 9.5.2a og kapittel 9.4.2 i kompendiet)

$\boldsymbol{v} = \nabla\phi = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$

Origo er eneste stagnasjonspunkt.

$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ så feltet er divergensfritt.

$\psi = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + c$ hvor c er en vilkårlig konstant.

Strømlinjene er gitt ved $x^2 - y^2 =$ konstant, og er hyperbler.

Se høyre del av figur 9.3 i kompendiet, dog med betydningen av heltrukne og stiplede linjer byttet om.

Oppgave 2

(se oppgave 5.9 i boka)

Vi har $\nabla \times \boldsymbol{v} = -2yz\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$. La S være sirkelskiven $x^2 + y^2 \leq 1$ for $z = 1$, som har enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$. Stokes sats sier

$$\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_S \nabla \times \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}\sigma = \int_S \mathrm{d}\sigma = \pi$$

Oppgave 3

(se oppgave 5.5 i boka)

$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 1$

La volumet V være $0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

La flaten S_0 være $x^2 + y^2 \leq 1$ for $z = 0$.

Gauss sats sier da

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}\tau = \int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}\sigma - \int_{S_0} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{k} \,\mathrm{d}\sigma$$

Venstresiden er $2\pi/3$. Andre integral på høyresiden er $\pi/4$.

Svaret blir $11\pi/12$.

Oppgave 4

(se oppgave 10.12 i kompendiet)

4a Fouriers lov $\boldsymbol{H} = -k\nabla T$.

Varmestransportlikningen $\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T$.

Her er T temperaturen i Kelvin, t er tiden i sekunder, ∇ er gradient-operatoren som har dimensjon m^{-1}, k er vameledningstallet i $\frac{J}{msK}$, κ er varmediffusiviteten i m^2/s, og $\boldsymbol{H}$ er varmeflukstettheten i $\frac{J}{m^2 s}$.

4b

$$\nabla T = \Delta T \left(\frac{1}{a} - \frac{2x}{a^2}\right)\left(\frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2}\right)\frac{z}{c}\boldsymbol{i} + \Delta T \left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(\frac{1}{b} - \frac{2y}{b^2}\right)\frac{z}{c}\boldsymbol{j}$$
$$+ \Delta T \left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(\frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2}\right)\frac{1}{c}\boldsymbol{k}$$

I sentrum av rommet har vi $\nabla T = \frac{\Delta T}{16c}\boldsymbol{k}$ som peker opp, altså må myggen fly rett ned.

4c Fouriers lov sier at varmeflukstettheten er $-k_l \nabla T$. Ved veggen $x = a$ har vi

$$\nabla T = -\frac{\Delta T}{a}\left(\frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2}\right)\frac{z}{c}\boldsymbol{i}$$

Dermed får vi total varmestrøm

$$\int -k_l \nabla T \cdot \boldsymbol{i}\, \mathrm{d}\sigma = \frac{k_l \Delta T bc}{12a}.$$

4d

$$\nabla^2 T = \nabla \cdot \nabla T = -\Delta T \frac{2}{a^2}\left(\frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2}\right)\frac{z}{c} - \Delta T \left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}\right)\frac{2}{b^2}\frac{z}{c}$$

I sentrum av rommet har vi

$$\nabla^2 T = -\frac{\Delta T}{4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

som er negativ.

Fra varmetransportlikningen (uten konveksjon) har vi

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa_l \nabla^2 T = -\kappa_l \frac{\Delta T}{4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

Følgelig må temperaturen midt i rommet avta, med tidsderivert av temperaturen som angitt.

Oppgave 5

5a (se beskrivelsen av eksperimenter vi har gjort i løpet av høsten)

Kreftene som virker på lokket er tyngdekraften mg som virker ned, trykkraften fra vannet pA som virker ned, trykkraften fra lufta p_0A som virker opp, og eventuelt en kraft K fra glasskanten som virker ned. Summen av disse kreftene må være lik null fordi lokket er i ro (husk Newtons første eller andre lov). Ettersom $K \geq 0$ så kan ikke de tre førstnevnte kreftene gi netto nedadrettet kraft på lokket

$$p_0A - p|_{z=0}\, A - mg \geq 0$$

Vanntrykket like over lokket er da begrenset av

$$p|_{z=0} \leq p_0 - \frac{mg}{A}$$

Med hydrostatisk trykk i vannsøylen over lokket finner vi øvre grense for trykket oppunder bunnen

$$p|_{z=h} = p|_{z=0} - \rho gh \leq p_0 - \frac{mg}{A} - \rho gh$$

Trykket kan ikke være mindre enn null $p|_{z=h} \geq 0$.

For å være mer nøyaktig vil vannet begynne å koke dersom trykket blir mindre en damptrykket.

5b (se oppgave 10.9 i kompendiet og beskrivelsen av eksperimenter vi har gjort i løpet av høsten)

La $z = 0$ i tappepunktet C. Vi løser oppgaven ved hjelp av Bernoullis likning, som må anvendes langs en strømlinje. Vi tenker oss således en strømlinje fra overflaten til innsjøen A, gjennom røret, og ut i tappepunktet C. Vi kan med god tilnærming sette $v = 0$ i overflaten til innsjøen fordi den antas å være stor i forhold til mengden vann som tappes.

Legg merke til at trykket er lik p_0 både ved overflaten til innsjøen og ved tappepunktet. Ved bruk av Bernoullis likning mellom overflaten til innsjøen og tappepunktet C får vi

$$\frac{p_0}{\rho} + gh = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v^2}{2}$$

så $v = \sqrt{2gh}$.

La oss nå anta at røret har konstant tverrsnitt slik at strømfarten i røret er den samme overalt. Ved bruk av Bernoullis likning mellom topppunktet B og tappepunktet C får vi

$$\frac{p_B}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gH = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v^2}{2}$$

så $p_B = p_0 - \rho gH$.

Ettersom trykket ikke kan være negativt får vi $H \leq \frac{p_0}{\rho g}$.

For å være helt nøyaktig vil øvre grense for høyden H være mindre enn $\frac{p_0}{\rho g}$ fordi vannet vil begynne å koke dersom trykket blir mindre en damptrykket.