Fasit for deleksamen i MEK1100 gitt 11 oktober 2012

Oppgave 1

1a Flaten er gitt som en ekviskalarflate til $f(x,y,z) = z + \cos\frac{\pi x}{2} - 2y$. Da har vi enhetsnormalvektor

$$\boldsymbol{n} = \frac{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{5 + \frac{\pi^2}{4}\sin^2\frac{\pi x}{2}}}$$

1b

$$\nabla h = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} \qquad \text{og} \qquad \nabla h|_{x=y=0} = 2\boldsymbol{j}$$

Terrenget stiger brattest i y-retning. Enhetsvektor i den retningen er $\boldsymbol{j}$. Dermed får vi stigningstall

$$\boldsymbol{j} \cdot \nabla h|_{x=y=0} = 2$$

1c Vi kan parametrisere overflaten som

$$\boldsymbol{r}(x,y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + h(x,y)\boldsymbol{k}$$

Trykkraften blir

$$\boldsymbol{F} = \int -p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} -p_0\,\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4p_0(2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})$$

Oppgave 2

2a

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

2b

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$$

2c Vi løser

$$\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{\boldsymbol{k}(y\mathrm{d}y + x\mathrm{d}x)}{x^2 + y^2} = 0$$

Det er da tilstrekkelig å løse

$$y\mathrm{d}y = -x\mathrm{d}x$$

som har sirkler rundt origo som løsning

$$x^2 + y^2 = \text{konstant}$$

Oppgaven kan også løses ved hjelp av strømfunksjon.

2d Vi kan bruke Stokes sats fordi det ikke er singulære punkter innenfor superellipsen. Ettersom feltet er virvelfritt, så blir svaret lik null.

Oppgaven lar seg også løse ved direkte utregning, men det er ikke veldig enkelt.

2e Vi kan ikke bruke Stokes sats fordi origo er et singulært punkt. Velg en passende parametrisering, for eksempel

$$\boldsymbol{r}(\theta) = \boldsymbol{i}\cos\theta + \boldsymbol{j}\sin\theta$$

Da finner vi

$$\oint \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi$$

Oppgave 3

Kreftene som virker på lokket er tyngdekraften mg som virker ned, trykkraften fra vannet pA som virker ned, trykkraften fra lufta p_0A som virker opp, og eventuelt en kraft fra glasskanten som virker ned. De tre første kreftene kan ikke gi netto nedadrettet kraft på lokket

$$p_0A - p|_{z=0}\,A - mg \geq 0$$

Vanntrykket like over lokket er da begrenset av

$$p|_{z=0} \leq p_0 - \frac{mg}{A}$$

Med hydrostatisk trykk i vannsøylen over lokket finner vi øvre grense for trykket oppunder bunnen

$$p|_{z=h} = p|_{z=0} - \rho g h \leq p_0 - \frac{mg}{A} - \rho g h$$

Trykket kan ikke være mindre enn null $p|_{z=h} \geq 0$.

Oppgave 4

α må ha fysisk dimensjon (eller enhet) $\dfrac{1}{m^2 s}$

Volumfluksen gjennom snittflate normalt på x-aksen regner vi ut direkte, sett $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}$,

$$\int_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = \int_{-b}^{b}\int_{-h}^{0} \alpha(b^2 - y^2)(z+h)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\alpha b^3 h^2$$

Volumfluksen gjennom snittflate som står på skrå kan regnes ut direkte, men det kan være komplisert å få grensene for integrasjonen riktig.

Det er egentlig tilstrekkelig å observere at volumfluksen gjennom enhver snittflate på tvers av elva må være den samme fordi strømningen er divergensfri, $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$, noe som betyr at den verken ekspanderer eller kontraherer.

For en formell løsning med Gauss sats kan vi lage et kontrollvolum som er avgrenset av snittflaten S benyttet ovenfor og snittflaten Σ som har normalvektor $\boldsymbol{N}$ og for øvrig sideflater gitt ved elvebreddene $y = \pm b$ og $z = 0$ og $z = -h$. Ettersom vannet ikke kan renne gjennom sideflatene, og volumintegralet av divergensen er lik null, så må fluksen gjennom de to tverrsnittene være like store.