Oblig 1 MEK1100, høst 2012

Krav til innlevering og godkjenning

Hvert punkt gir makismalt 10 poeng. Poengene tildeles på liknende vis som på en eksamen. I alt kan du oppnå 130 poeng. Vi krever minimum 70 prosent, eller 91 poeng for å få godkjent. Dersom dette ikke er innfridd ved innlevering, men besvarelsen vurderes som et seriøst forsøk, kan det gis anledning til ny innlevering. For informasjon om regler se `http://www.mn.uio.no/math/studier/admin/obligatorisk-innlevering/`
Tidsfrister er gitt på semestersidene til MEK1100.

Du kan bruke LaTeX eller levere en håndskrevet besvarelse. Ta med autentiske listinger av alle skript og funksjoner i Matlab, samt de kjøreeksemplene det bes om i oppgaven. Med autentisk menes printinger av de faktiske skript eller funksjoner du har laget, slik de er kalt i Matlab, og utskrifter/plott fra faktiske Matlabkjøringer. I utgangspunktet skal alle skript/funksjoner kjøre, men du kan få noe utteling for ufullstendige forsøk som ikke gir rett resultat. Kjøreeksempel skal da uansett legges ved der det spørres etter et slikt. Resultatfiler/kjøreeksempler som er lagt ved, men som ikke kan framkomme som resultat av vedlagte skript og programmer, gir ikke poeng.

Det skal stå filnavn på alle listinger av skript og funksjoner, og oppgavenummer (med delpunkt) på alle resultatlistinger og plott.

Det er tillatt å samarbeide i grupper om den obligatoriske oppgaven. Likevel må alle levere en individuell besvarelse. På denne besvarelsen skal navnene på de man har samarbeidet med angis. Oppgaver der dette mangler kan bli underkjent.

1 Skalering

En kanon er plassert i origo på en flat horisontal bakke. x-aksen er horisontal langs bakken og y-aksen peker vertikalt oppover. En kanonkule skytes ut med fart v_0 ved tiden $t = 0$. Kanonen kan innstilles med utskytningsvinkel θ i forhold til den horisontale x-aksen. Kula vil følge en bane gitt ved

$$
\begin{aligned}
x(t) &= v_0 t \cos\theta \\
y(t) &= v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2
\end{aligned}
$$

a) Finn tiden t_m når kula faller ned på bakken ($y = 0$) og posisjonen $x(t_m) = x_m$ hvor dette skjer.

b) Innfør dimensjonsløse variable (x^*, y^*, t^*) for x, y, t når du skalerer med x_m for lengde og t_m for tid. Forklar hvorfor det ikke er behov for å skalere vinkelen θ.

c) Bruk Matlab for å tegne baner (x^*, y^*) for tre utgangsvinkler θ_n for $n = 1, 2, 3$. Velg $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{4}, \theta_2 = \frac{\pi}{4}$ og $\frac{\pi}{4} < \theta_3 < \frac{\pi}{2}$. Tegn de tre banene i samme koordinatsystem, og angi hvilken bane som svarer til hvilken utgangsvinkel. Forklar hvorfor disse diagrammene kan brukes til å finne kulas baner for forskjellige utgangshastigheter v_0 og forskjellige verdier av g.

2 Strømlinjer til et todimensjonal hastighetsfelt

I denne oppgaven brukes ikke Matlab.

Vi skal nå se på hastighetsfeltet

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} = xy\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$$

a) Finn strømlinjene. HINT: Du må løse ei differensiallikning som viser seg å være separabel, det vil si at den kan skrives på formen $f(x)dx = g(y)dy$. Denne burde det være lett å integrere.

b) Tegn strømlinjene og sett på piler for å indikere retningen på strømmen.
Et stagnasjonspunkt er et punkt hvor hastighetsfeltet er lik null. Finn alle stagnasjonspunktene og identifiser hvor i plottet disse ligger. Det er vanlig å tegne stagnasjonspunkter som tjukke kulepunkter.

c) Vis at det ikke finnes en strømfunksjon ψ.

HINT: En strømfunksjon $\psi(x, y)$ for et todimensjonalt felt $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$ i xy-planet har egenskapen $v_x = -\partial\psi/\partial y$ og $v_y = \partial\psi/\partial x$. Dersom en slik strømfunksjon eksisterer så er strømlinjene gitt ved ekviskalarkurvene til strømfunksjonen, $\psi(x, y) =$ konstant.

Dersom et felt er todimensjonalt i xy-planet og er divergensfritt, så eksisterer strømfunksjonen slik som angitt ovenfor. Dersom feltet har divergens. så finnes det ikke en strømfunksjon.

For å vise at feltet ovenfor ikke har en strømfunsjon, kan man enten vise at forsøk på å regne ut ψ ender i en selvimotsigelse, eller man kan vise at divergensen til feltet er ulik null.

3 Et annet todimensjonalt strømfelt

I denne oppgaven brukes ikke Matlab.

Et hastighetsfelt i xy-planet er gitt ved $\boldsymbol{v} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j}$ der

$$u = \cos(x)\sin(y), \quad v = -\sin(x)\cos(y). \tag{1}$$

a) Finn divergens og virvling av hastighetsfeltet.

b) Tegn opp strømvektorer langs x- og y-aksen.

c) Finn sirkulasjonen om randa til kvadratet definert ved $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ og $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.

d) Forklar hvorfor det eksisterer en strømfunksjon for feltet gitt i likning (1), se hintet gitt i forrige oppgave. Vis at strømfunksjonen kan skrives

$$\psi = \cos(x)\cos(y). \tag{2}$$

e) Bruk Taylorutvikling av andre orden til å finne tilnærmede strømlinjer nær origo.

4 Strømlinjer og hastighetsfelt i Matlab

I denne oppgaven skal du skrive noen funskjoner og skript i Matlab. Disse og de plott som produseres skal leveres inn som en del av besvarelsen. Det er viktig at de filene du lager har de navn som oppgis. Alle figurer skal ha tittel og tekst på akser.

Sammen med oppgaveteksten, på hjemmesiden, finner du en fil `streamfun.m` med en funksjon som beregner strømfunksjonen (2) i området. Et kall på funksjonen kan se ut som

```
>> [x,y,psi]=streamfun(n);
```

der `x,y,psi` er arrayer for henholdsvis x-verdier, y-verdier og ψ. Inngangsparameteren `n` er antall punkter som brukes i hver retning. Avstanden mellom punktene, i begge retninger, blir da $\Delta x = \Delta y = \frac{\pi}{n-1}$.

a) Bruk funksjonen `streamfun` i et skript, `strlin.m`, som plotter konturlinjer for ψ når

   (i) $n = 5$

   (ii) $n = 30$

   Framstill tilfellene (i) og (ii) i hvert sitt diagram. Sammenhold plottene med punkt e i forrige oppgave og diskuter de valgte verdier for n.

b) Skriv en funksjon (filnavn `velfield.m`) som beregner hastigheter utfra likning (1) ved kallet

```
>> [x,y,u,v]=velfield(n);
```

   Bruk denne i et skript, `vec.m`, som tegner et vektorplott av hastighetsfeltet. Legg vekt på å velge et passende antall punkter for lesbarheten av plottet.

Matlab-hint

- En array med n jevnt fordelte punkter i intervallet $[a, b]$ lages best med `x=linspace(a,b,n);`.
- En pdf utgave av gjeldende figur i Matlab lages med
  `print('-dpdf', filnavn);`
  Ønsker du eps bytter du ut '-dpdf' med '-depsc'.
- I figurtitler kan det være gunstig å kombinere tekster og verdien av variable som brukes i Matlabkoden. Er n et heltall kan man f.eks. benytte
  `tit=sprintf('%s%d','Antall punkter =',n);title(tit);`

- De som ønsker å skrive hele, eller deler, av obligen i LaTeX oppmuntres til det. Det er da nyttig å inkludere alle `.m` filer i LaTeX koden. Dette gjøres enkelt ved verbatim-kommandoen
  `\verbatiminput{streamfun.m}`
  En må huske å inkludere verbatim i starten på LaTeX fila
  `\usepackage{verbatim}`