

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.

Eksamensdag: Mandag 6. juni 2005.

Tid for eksamen: 09.00 – 12.00.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Matematiske Formelsamling, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Det er tilsammen 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1.

I plane kartesiske koordinater (x, y) er et vektorfelt gitt ved:

$$\mathbf{v} = a(-x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$$

hvor $\mathbf{i}$ og $\mathbf{j}$ er enhetsvektorene og a er en konstant.

- Vis at feltet oppfyller kravene for at det skal eksistere en potensialfunksjon φ og en feltfunksjon (strømfunksjon) ψ .
- Finn funksjonene φ og ψ .
- Vis at ekviskalarlinjene for ϕ og ψ står normalt på hverandre.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

Vi skal se på to strømfelter fra potensialteorien (potensialstrøm) gitt ved følgende uttrykk for strømfunksjonen (feltfunksjonen) i kartesiske koordinater (x, y) .

$$\begin{aligned}\psi_1 &= Uy \\ \psi_2 &= -\frac{Ua^2y}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

hvor U og a er konstanter.

- Gi navn på disse to feltene, skisser strømlinjene og forklar kort hva de representerer.
- Forklar hvorfor funksjonen $\psi = \psi_1 + \psi_2$ også oppfyller betingelsene for å være strømfunksjon i potensialstrøm.
- Skisser strømlinjen $\psi = 0$.
- Innfør polarkoordinater (r, θ) og bestem komponentene av strømvektoren i polarkoordinater $\mathbf{v} = \{v_r, v_\theta\}$ langs strømlinjen $\psi = 0$. Hva beskriver dette feltet fysikalsk?

Formler: $v_r = -\frac{\partial\psi}{r\partial\theta}, \quad v_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial r}.$

Oppgave 3.

Varmestrømmen (varmeffluksen) per flateenhet og tidsenhet kan skrives

$$\mathbf{H} = \rho c T \mathbf{v} - k \nabla T$$

- Definer alle størrelsene som inngår med enheter og forklar hva de to leddene står for.
- Sett opp integralet for den totale varmemstrømmen gjennom en flate σ .

Gjennom et rør med sirkulært tverrsnitt og radius $r = a$ strømmer en væske med hastighet

$$\mathbf{v} = U \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \mathbf{i}$$

hvor U er konstant, r er avstand fra sentrum i røret og x -aksen med enhetsvektor $\mathbf{i}$ er lagt langs senteraksen (røraksen). Temperaturen i røret er gitt ved

$$T = T_0(1 - \beta x)$$

hvor T_0 og β er konstanter.

- Regn ut varmemstrømmen i x -retning gjennom en tverrsnittsflate normalt røraksen. Tettheten i væsken (ρ) og de termiske egenskapene (c, k) antas å være konstante.

SLUTT