

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.

Eksamensdag: Torsdag 1. juni 2006.

Tid for eksamen: 14.30 – 17.30.

Oppgavesettet er på ?? sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Matematiske Formelsamling, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Det er tilsammen 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1.

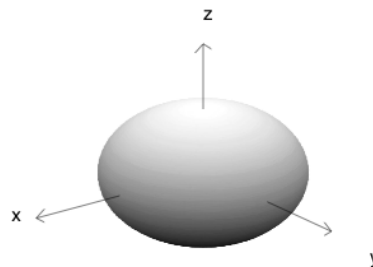
Et hastighetsfelt $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$ er gitt som gradienten til et potensial $\phi = xyz$.

- a) Regn ut hastighetsfeltet $\mathbf{v}$, og finn virvlingen og divergensen til $\mathbf{v}$.

Vi betrakter nå en lukket overflate σ gitt ved likningen

$$x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 2z^2 = 1.$$

Denne overflaten har formen til et deformert kuleskall som vist i figuren:



- b) Finn et uttrykk for enhetsnormalvektoren $\mathbf{n}$ til overflaten slik at $\mathbf{n}$ peker vekk fra origo.

(Fortsettes side 2.)

- c) Vis at overflaten σ kan parametriseres med to vinkler θ og ψ ved hjelp av formlene

$$\begin{aligned}x &= \sin \theta \cos \psi \\y &= \sqrt{2} \sin \theta \sin \psi \\z &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta\end{aligned}$$

for $0 \leq \theta \leq \pi$ og $0 \leq \psi \leq 2\pi$.

Uttrykk enhetsvektoren $\mathbf{n}$ fra punkt b) parametrisert ved hjelp av vinklene θ og ψ .

- d) Regn ut, på enklest mulig måte, fluksen av $\mathbf{v}$ ut av det deformerte kuleskallet σ .

Oppgave 2.

Vi betrakter plan strøm som er divergensfri og virvelfri overalt utenom singulære punkter. Et hastighetspotensial er gitt ved en sum av to ledd $\phi = Ux + U \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

- a) Gi navn til feltene representert ved første og andre ledd i uttrykket for ϕ , forklar kort (med ord og skisse) hva de representerer, og identifiser eventuelle singulære punkter.

I resten av denne oppgaven skal vi bruke plane polarkoordinater (r, θ) hvor r er avstanden fra origo og θ er vinkelen med x -aksen.

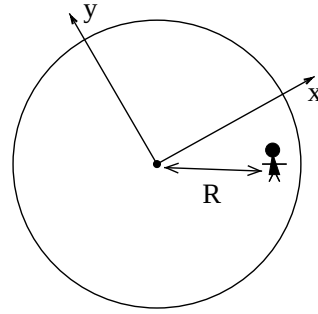
- b) Regn ut hastighetsfeltet $\mathbf{v} = v_r \mathbf{i}_r + v_\theta \mathbf{i}_\theta$. Finn strømfunksjonen ψ .
- c) Det finnes en strømlinje som skiller strømningene assosiert med første og andre ledd i uttrykket for ϕ . Vi skal finne en formel for denne spesielle strømlinjen ved følgende framgangsmåte: Finn først et stagnasjonspunkt til strømfeltet, $\mathbf{v} = 0$. Finn deretter strømlinjene som går igjennom dette stagnasjonspunktet. Skisser strømfeltet og indiker stagnasjonspunktet og den spesielle strømlinjen som skiller de to strømningene.

Formler: $\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}$

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 3.

Vi skal betrakte hastighetsfeltet til en karusell, dvs. rotasjon som et fast legeme, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, hvor $\boldsymbol{\omega} = \omega(t)\mathbf{k}$ er vinkelhastighetsvektoren og $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ er en posisjonsvektor relativt til rotasjonsaksen. Vi skal la vinkelhastigheten $\omega(t)$ være en funksjon av tiden slik at vi kan studere hva som skjer når karusellens omdreiningshastighet endrer seg. En person klamrer seg fast på karusellen i en avstand $|\mathbf{r}| = R$ fra omdreiningsaksen, som vist på figuren:



- Regn ut virvlingen og divergensen til $\mathbf{v}$. Diskuter om $\mathbf{v}$ er et potensialfelt, og finn i så fall potensialet ϕ . Diskuter om $\mathbf{v}$ har en strømfunksjon, og finn i så fall strømfunksjonen ψ . Undersøk om $|\mathbf{r}| = R$ er en strømlinje.
- Regn ut sirkulasjonen Γ rundt en sirkel med radius $|\mathbf{r}| = R$. Gjør denne utregningen som et kurveintegral. Kontroller svaret ved hjelp av Stokes sats.
- Vi skal nå betrakte karusellen mens den spinner opp fra ro til full omdreiningshastighet i løpet av en tid T . Vi benytter en svært forenklet modell

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\omega_0 t}{T} \mathbf{k} \quad \text{for } 0 < t < T$$

Akselerasjonen til personen er gitt ved den materielt deriverte (partikkelderiverte) av hastighetsfeltet,

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}.$$

Regn ut akselerasjonen i tidsintervallet $0 < t < T$, og angi retning og størrelse til lokal og konvektiv akselerasjon.

SLUTT