

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.

Eksamensdag: Onsdag 13. desember 2006.

Tid for eksamen: 15.30 – 18.30.

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Matematiske Formelsamling, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Det er tilsammen 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmåla.

Oppgave 1.

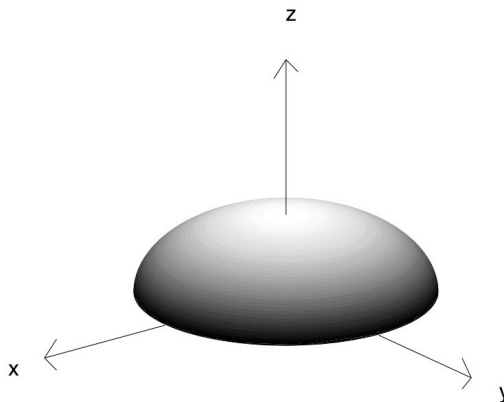
Vi har gitt et vektorfelt

$$\mathbf{v} = (x + \sin y + z)\mathbf{i} + (x^2 - y + e^z)\mathbf{j} + (x^2 + y^2 + 3)\mathbf{k}$$

- Finn divergensen til $\mathbf{v}$.
- Finn virvlingen til $\mathbf{v}$.
- Diskuter om $\mathbf{v}$ er et potensialfelt, og finn i så fall potensialet. Diskuter om $\mathbf{v}$ har en strømfunksjon, og finn i så fall strømfunksjonen.

(Fortsettes side 2.)

Vi ser nå på en lukket overflate σ som er satt sammen av en “topp” σ_T og en “bunn” σ_B . Toppen σ_T er gitt ved likningen $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$ avgrenset av $z \geq 0$. Bunnen σ_B er gitt ved $z = 0$ avgrenset av $x^2 + y^2 \leq 1$. Toppen og bunnen avgrenser et volum τ . Se figur.



- d) Finn enhetsnormalvektorer til σ_T og σ_B som peker ut av volumet τ
- e) Regn ut fluksen q_B av $\mathbf{v}$ ut fra volumet τ gjennom bunnen σ_B .
- f) Regn ut fluksen q_T av $\mathbf{v}$ ut fra volumet τ gjennom toppen σ_T .

Oppgave 2.

Vi ser på plan strøm som er divergensfri og virvelfri overalt utenom singulære punkter. En strømfunksjon er gitt ved en sum av to ledd

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \quad \text{hvor} \quad \psi_1 = -Uy \quad \text{og} \quad \psi_2 = \frac{Ua^2y}{x^2 + y^2}$$

hvor a og U er konstanter.

- a) Det kan være en fordel å uttrykke dette strømfeltet i plane polarkoordinater $x = r \cos \theta$ og $y = r \sin \theta$. Skriv strømfunksjonene ψ_1 og ψ_2 i polarkoordinater.

Vis at det totale hastighetsfeltet er

$$\mathbf{v} = U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \mathbf{i}_r - U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \mathbf{i}_\theta.$$

Gi navn til strømfeltene representert ved ψ_1 og ψ_2 , tegn en skisse for hvert av disse strømfeltene, angi retningen til strømfeltene, og angi hvor eventuelle singulære punkter er lokalisert.

(Fortsettes side 3.)

- b) Regn ut sirkulasjonen til strømfeltet representert ved ψ rundt sirkelen $r = R$.

Regn deretter ut sirkulasjonen rundt ellipsen gitt ved likninga $(x - 5a)^2 + (2y - 4a)^2 = a^2$.

- c) Finn stagnasjonspunktene til strømfeltet representert ved ψ . Finn deretter strømlinjene som går gjennom stagnasjonspunktene.

Skisser strømfeltet, indiker stagnasjonspunktene, og marker strømlinjene som går gjennom stagnasjonspunktene.

Forklar hvordan dette strømfeltet kan representere vind som blåser på tvers av et langstrakt telt med halvsirkelformet tverrsnitt (et såkalt tunneltelt).

- d) Vi skal nå betrakte luftstrømmen på tvers av et telt som så på i forrige oppgave. Vi lar tyngdens akselerasjon $\mathbf{g}$ være rettet i negativ y -retning. Tettheten til lufta er ρ . Vi gjør dessuten den urealistiske forenklingen at teltduken er stiv og ikke deformerer seg når det blåser.

Vi skal la lufttrykket p rundt teltet være gitt ved Bernoullis likning. Skriv ned Bernoullis likning (utledning ikke nødvendig) og forklar når og hvordan denne likningen kan brukes.

Regn ut total kraft $\mathbf{F}$ som virker fra lufta på teltet. Forklar ut fra dette svaret hvorfor det kan være en god idé å bardunere teltet godt på en vindfull dag.

Formler:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathbf{i}_\theta, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}$$

$$\int \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta = \frac{\sin^3\theta}{3}, \quad \int \sin^3\theta \, d\theta = \frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta$$

SLUTT