

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.

Eksamensdag: Fredag 1. juni 2007.

Tid for eksamen: 9.00 – 12.00.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Matematiske Formelsamling, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Det er tilsammen 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1.

Gitt et vektorfelt i kartesiske koordinater

$$\mathbf{v} = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y + z)\mathbf{k}$$

hvor $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$ er enhetsvektorer henholdsvis langs de tre akseretningene x , y og z .

- Finn divergensen og virvlingen (curl) til $\mathbf{v}$.
- Skriv opp Gauss sats (bevis kreves ikke) og definer alle størrelser som inngår i likningen.
- Beregn vektorfluksen av $\mathbf{v}$ gjennom en rettvinklet terning med sidekanter a . Hvorfor blir resultatet det samme uavhengig av hvor sentrum av terningen ligger?

(Fortsettes side 2.)

- d) Skriv opp Stokes sats (bevis kreves ikke) og definer alle størrelser som inngår i likningen. Finn sirkulasjonen av vektoren $\mathbf{v}$ omkring en vilkårlig lukket kurve.
- e) Diskuter om $\mathbf{v}$ er et potensialfelt og finn i så fall potensialfunksjonen.

Oppgave 2.

Strømvektoren i plane polarkoordinater kan skrives $\mathbf{v} = v_r \mathbf{i}_r + v_\theta \mathbf{i}_\theta$ hvor $\mathbf{i}_r$ og $\mathbf{i}_\theta$ er enhetsvektorer i $r\theta$ -systemet. Strømkomponentene kan skrives

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

- a) Vis at dette gir et divergensfritt felt uavhengig formen på funksjonen ψ .

I et to-dimensjonalt virvelfritt og divergensfritt strømfelt i xy -planet er strømfunksjonen (feltfunksjonen) ψ gitt ved tre ledd

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$$

hvor

$$\psi_1 = Uy$$

$$\psi_2 = -\frac{Ua^2y}{x^2 + y^2}$$

$$\psi_3 = Ua \ln [(x^2 + y^2)^{1/2}]$$

U og a er positive konstanter, og xy -aksene ligger i horisontalplanet $z = 0$.

- b) Skisser strømlinjene for hvert av de tre feltene ψ_1 , ψ_2 og ψ_3 og gi navnet på feltene.
- c) Innfør plane polarkoordinater r, θ (regnet fra origo i xy -systemet). Finn uttrykket for strømfunksjonen ψ i polarkoordinater. Vis at sirkelen $r = a$ er en strømlinje.
- d) Finn komponentene v_r og v_θ langs sirkelen $r = a$. Hvor på sirkelen er $|\mathbf{v}| = U$?
- e) Gjør rede for at Bernoullis likning kan brukes til å finne trykket langs sirkelen $r = a$. Trykket i punkt hvor strømhastigheten er lik U er p_0 . Regn ut trykkraften per lengdeenhet på en sylinder med radius a og sentrum i origo.

Formel:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}$$

SLUTT