

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.

Eksamensdag: Mandag 2. juni 2008.

Tid for eksamen: 14.30 – 17.30.

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Matematiske Formelsamling, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Det er tilsammen 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1.

Gitt et vektorfelt i kartesiske koordinater

$$\mathbf{v} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

hvor $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$ er enhetsvektorer henholdsvis langs de tre akseretningene x , y og z .

- Finn divergensen og virvlingen (curl) til $\mathbf{v}$.
- Skriv opp Gauss sats (bevis kreves ikke) og definer alle størrelser som inngår i likningen.
- Beregn vektorfluksen av $\mathbf{v}$ gjennom en kuleflate med radius a . Hvorfor blir resultatet det samme uavhengig av hvor sentrum av kula ligger?
- Skriv opp Stokes sats (bevis kreves ikke) og definer alle størrelser som inngår i likningen.

(Fortsettes side 2.)

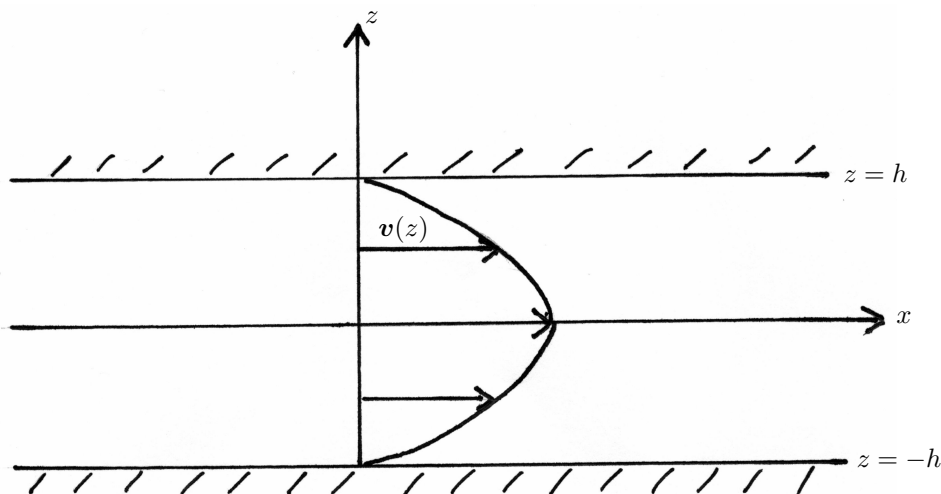
- e) Finn sirkulasjonen av vektoren $\mathbf{v}$ omkring en lukket kurve med lengde L .
- 1) Når kurven ligger i xy -planet
 - 2) Når kurven ligger i xz -planet.

Oppgave 2.

Den totale varmestrømmen (varmefluksen) per flateenhet og tidsenhet kan skrives

$$\mathbf{H} = \rho c T \mathbf{v} - k \nabla T.$$

- a) Definer alle størrelsene som inngår med enheter og forklar hva de to leddene står for. Sett opp integralet for den totale varmestrømmen gjennom en flate σ .



La oss se på plan rettlinjet strøm av en væske mellom to parallelle plan. Avstanden mellom planene er $2h$. Koordinataksen x er rettet langs midtlinjen mellom planene og z -aksen normalt planene som figuren viser. Strømmen er rettet i x -retning og strømvektoren er:

$$\mathbf{v} = u_0 \left[1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \mathbf{i}$$

hvor u_0 er konstant og $\mathbf{i}$ er enhetsvektoren i x -retning. Temperaturen i væsken er gitt ved

$$T(z) = T_0 \left[2 - \frac{z}{h} \right]$$

hvor T_0 er konstant.

- b) Beregn varmestrømmen i væsken gjennom en snittflate normalt x -aksen med bredden b normalt xz -planet. De termiske parametrene og tettheten i væsken antas å være konstanter.

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 3.

Gitt strømvektoren i xy -planet

$$\mathbf{v} = -A(x\mathbf{i} - y\mathbf{j})$$

hvor $\mathbf{i}$ og $\mathbf{j}$ er enhetsvektorer og A er en konstant.

- a) Avgjør om det finnes en strømfunksjon (feltfunksjon) ψ . Finn likningen for strømlinjene. Tegn skisse for $\psi = 0, \pm 1$ og ± 2 og angi strømretningen på strømlinjene (Sett $A = 1$).
- b) Avgjør om det finnes en potensialfunksjon (hastighetspotensiale) ϕ og finn denne om den eksisterer. Hva kalles dette feltet?
- c) Finn lokal og konvektiv akselerasjon for en partikkel som driver med strømmen.

Formler: $\frac{D\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$

SLUTT