

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.

Eksamensdag: Torsdag 11 desember 2008.

Tid for eksamen: 14:30 – 17:30.

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Formeltillegg på 2 sider.

Tillatte hjelpemidler: K. Rottmann: Matematische Formelsammlung, godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (vekt 16%)

Et strømfelt i (x, y) -planet er gitt ved $\mathbf{v} = (y + x)\mathbf{i} + (y^2 - x)\mathbf{j}$.

1a (vekt 10%)

Bruk Stokes sats til å finne sirkulasjonen $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ langs en sirkel om origo med radius r .

1b (vekt 6%)

Hva blir sirkulasjonen dersom vi flytter sirkelen slik at sentrum ligger i $(a, 0)$?

Oppgave 2 (vekt 34%)

Et hastighetspotensial er gitt ved $\phi(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

2a (vekt 10%)

Vis at

$$\nabla^2 \phi = 0,$$

og forklar hvorfor det finnes en strømfunksjon.

2b (vekt 10%)

Finn hastigheten og strømfunksjonen.

2c (vekt 10%)

Finn strømmens stagnasjonspunkt og strømlinjene som går gjennom dette.

(Fortsettes på side 2.)

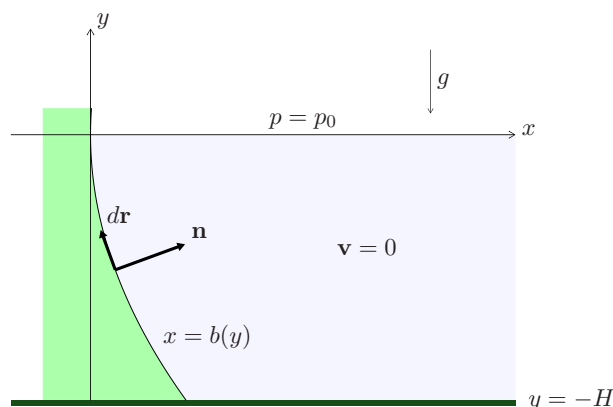


Figure 1: Definisjonsskisse av demning og reservoar.

2d (vekt 4%)

Tegn strømlinjene fra forrige oppgavepunkt og angi strømmens retning langs dem.

Oppgave 3 (vekt 20%)

Massefluksen gjennom en flate er gitt ved integralet (skal ikke vises)

$$\int_{\sigma} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

3a (vekt 4%)

Vis at massfluksintegralet slik det er gitt ovenfor har riktig benevning.

3b (vekt 16%)

Utledd kontinuitetslikningen fra prinsippet om massebevaring.

Oppgave 4 (vekt 30%)

Et vannreservoar er begrenset av en demning som har en profil gitt ved $x = b(y)$, der y akse peker vertikalt oppover slik at tyngdekraft pr. masseenheter er gitt ved $\mathbf{g} = -g\mathbf{j}$. Væsken er homogen og inkompressibel, med tetthet ρ . En skisse er gitt i figur 1. Vi antar at forholdene er konstante normalt på papirplanet og vil, etterhvert, regne ut kraft på demning pr. breddeenhet. I reservoaret er væsken i likevekt, dvs. $\mathbf{v} = 0$, og trykket på overflaten er p_0 .

4a (vekt 10%)

Bruk Eulers bevegelseslikning til å vise at trykket i væsken er

$$p = p_0 - \rho g y.$$

(Fortsettes på side 3.)

4b (vekt 10%)

Trykkraften, pr. breddeenhet, på et lite profilelement $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ (se figur) er gitt ved $-p\mathbf{n}|d\mathbf{r}|$ (skal ikke vises). Vis at trykkraften (pr. breddeenhet) for hele profilet blir

$$\int_{\lambda} -p(dy\mathbf{i} - dx\mathbf{j}),$$

der λ er kurven gitt ved $x = b(y)$.

4c (vekt 10%)

Finn den totale trykkraften på profilet fra bunnen ($x = b(-H)$, $y = -H$) til overflaten ($x = y = 0$) når $b(y) = \alpha y^2$ der α er konstant.

— Slutt —