

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.

Eksamensdag: Torsdag 10. desember 2009.

Tid for eksamen: 14:30 – 17:30.

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Formelt tillegg på 2 sider.

Tillatte hjelpemidler: K. Rottmann: Matematische Formelsammlung, godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (vekt 50%)

1a (vekt 10%)

Et todimensjonalt hastighetspotensial er gitt ved

$$\phi = a(x^4 - 6x^2y^2 + y^4),$$

der a er en konstant. Avgjør om ϕ er Laplaceisk og angi hva slags benevnelse a må ha.

1b (vekt 10%)

Bestem strømfunksjonen. Finn også hastigheten og stagnasjonspunktet (punkt der hastighetsvektoren er null).

1c (vekt 10%)

Vis at x -aksen er en strømlinje og finn strømlinjene som går gjennom stagnasjonspunktet på en form der y er eksplisitt uttrykt som funksjon av x , eller omvendt.

1d (vekt 10%)

Sett trykket i origo lik p_0 , anta at det ikke er noen tyngde eller annen ytre volumkraft, og finn trykket langs x -aksen. For hvilke verdier av x gir dette trykket fysisk mening.

1e (vekt 10%)

Vi betrakter akselerasjonen til væskepartiklene som følger x -aksen. Forklar hvorfor $\mathbf{j}$ komponenten av akselerasjonen er null og bestem $\mathbf{i}$ komponenten som funksjon av x . (Det spørres *ikke* om akselerasjonen i hele feltet.)

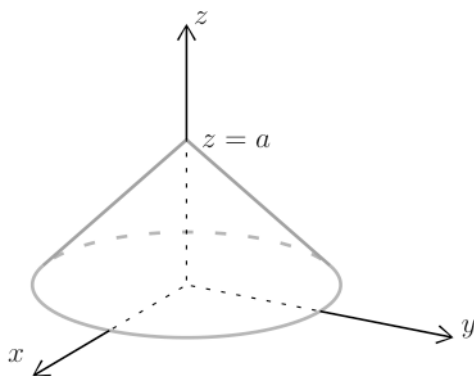
(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2 (vekt 10%)

Et hastighetsfelt, $\mathbf{v}$, er virvelfritt i hele rommet. Vi definerer et hastighetspotensial ved

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r},$$

der λ er en kurve som starter i origo og slutter i $\mathbf{r}$. Vis at definisjonen av ϕ er entydig i den forstand at valget av λ ikke påvirker verdien av ϕ så lenge kurven starter i origo og ender i $\mathbf{r}$. (hint: bruk Stokes sats)



Definisjonsskisse av kjegleflaten σ_K .

Oppgave 3 (vekt 40%)

Vi lar x , y og z betegne et sett av kartesiske koordinater i rommet, mens $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, θ og z er sylinderkoordinater for det samme rommet. Det er definert to flater.

σ_K : Dette er en kjegleflate definert ved

$$z = a - r, \quad 0 \leq z \leq a,$$

der a er en konstant.

σ_0 : Denne flaten ligger i xy -planet og er begrenset ved

$$x^2 + y^2 \leq a^2,$$

der a er samme konstant som i definisjon av σ_K .

Vi har også gitt et hastighetsfelt i sylinderkoordinater

$$\mathbf{v} = A \{ r \mathbf{i}_r + r \mathbf{i}_\theta + (z + b) \mathbf{k} \},$$

der A og b er konstanter.

3a (vekt 10%)

Finn uttrykket for hastighetsfeltet i kartesiske koordinater (x , y og z) og med kartesiske enhetsvektorer ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$). Beregn divergensen.

(Fortsettes på side 3.)

3b (vekt 10%)

Regn ut volumfluksen gjennom σ_0

$$Q_0 = \int_{\sigma_0} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

der $\mathbf{n}$ skal ha en positiv z -komponent. Bestem benevningen på A , a og b og sjekk at Q_0 har rett benevning.

3c (vekt 10%)

Parameteriser σ_K i r og θ og beregn volumfluksen, Q_K , ut gjennom σ_K som et flateintegral. Velg igjen en enhetsnormal som har positiv z -komponent.

3d (vekt 10%)

Bruk resultatet for Q_0 i deloppgave 3b og Gauss sats for å beregne Q_K .

— Slutt —