

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.

Eksamensdag: Torsdag 3 juni 2010.

Tid for eksamen: 14:30 – 17:30.

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Formeltillegg på 2 sider.

Tillatte hjelpemidler: K. Rottmann: Matematische Formelsammlung, godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (vekt 40%)

1a (vekt 10%)

Et todimensjonalt hastighetspotensial er gitt ved

$$\phi = Ux + ae^{-ky} \sin(kx),$$

der U , a og k er konstanter. Avgjør om ϕ er Laplaceisk og angi hva slags benevnelse a , k og U må ha.

1b (vekt 10%)

Finn hastighetsvektor og bestem divergensen og virvlingen til hastighetsfeltet.

1c (vekt 10%)

Finn strømfunksjonen.

1d (vekt 10%)

En flate er vinkelrett på xy -planet og har kurven λ_a som skjæring med dette planet, der λ_a er den delen av y -aksen som ligger mellom $y = 0$ og $y = L$. Finn volumstrømmen per tid og per bredde normalt xy -planet gjennom denne flaten, regnet fra $x < 0$ til $x > 0$. Finn også volumstrømmen per bredde gjennom en annen flate som står normalt på xy -planet og skjærer dette i kvartsirkelen som forbinder punktet $(x, y) = (L, 0)$ med $(x, y) = (0, L)$. Vi regner volumstrømmen i retningen fra origo.

Hint: det kan være vanskelig å regne ut den siste fluksen ved direkte integrasjon.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2 (vekt 10%)

En krum flate i et tredimensjonalt rom er gitt i Kartesiske koordinater ved

$$f(x, y, z) = C,$$

der C er en konstant. Vis at gradienten til f står normalt på den krumme flaten.

Oppgave 3 (vekt 30%)**3a** (vekt 10%)

Vi betrakter en krum flate gitt i sylinderkoordinater ved

$$r = a(2 + \tanh kz),$$

der r er avstanden fra z -aksen til flaten og a og k er konstanter. Husk at

$$\tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t}, \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

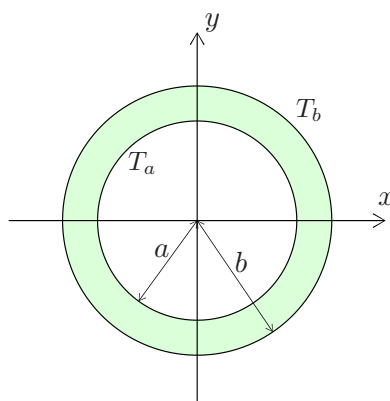
Denne flaten beskriver et rør langs z akse som har liten radius når z er stor negativ og stor radius når z er stor positiv. Bestem diameteren til røret når $kz \rightarrow -\infty$ og $kz \rightarrow \infty$. Finn et uttrykk for enhetsnormalen til rørflaten. Velg den som peker ut av røret.

3b (vekt 10%)

Forklar betingelsene for at Bernoullis likning kan brukes. Likningen skal ikke utledes.

3c (vekt 10%)

Et fluid strømmer stasjonært i positiv z -retning gjennom røret. Fluidet antas å være friksjonsfritt og har konstant tetthet ρ . Vi betrakter to tverrsnitt, A og B, gitt ved hhv. $z = z_a$ og $z = z_b$, der $kz_a \ll -1$ og $kz_b \gg 1$. Vi antar videre at vi kan se bort fra tyngden, at strømmen er konstant over tverrsnittene og at vi kan bruke diameterene funnet i deloppgave a. Finn strømfart og trykk i tverrsnitt B når strømfarten er u_a og trykket er p_a i snitt A.



Tverrsnitt av rør.

Oppgave 4 (vekt 20%)

I denne oppgaven bruker vi sylinderkoordinater r , θ og z . To sirkulære sylinderflater har radius $r = a$ og $r = b > a$. Mellom disse har vi et fast, termisk ledende stoff i form av et rør. Røret antas å strekke seg til uendelig i begge retninger langs z -aksen. På den indre sylinderflaten har vi gitt en konstant temperatur T_a , mens vi på den ytre sylinderflaten har den konstante temperaturen T_b .

4a (vekt 10%)

Anta at temperaturen i røret avhenger bare av r og finn den.

4b (vekt 10%)

Vi definerer en sylinderformet flate, σ_c , ved $r = c$, der $a < c < b$, og $0 \leq z \leq H$. Finn energistrømmen per tid gjennom denne flaten.

— Slutt —