

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.
Eksamensdag: Fredag 10 juni 2011.
Tid for eksamen: 09:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 3 sider.
Vedlegg: Formeltillegg på 2 sider.
Tillatte hjelpemidler: K. Rottmann: Matematiske Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Det er 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1

Anta at vektorfeltet $\mathbf{v}$ er todimensjonalt i xy -planet og kan representeres ved hjelp av en strømfunksjon ψ og et potensial ϕ . Vi skal bruke de plane polarkoordinatene r og θ definert ved $x = r \cos \theta$ og $y = r \sin \theta$.

1a

Uttrykk komponentene til $\mathbf{v}$ ved hjelp av ψ og ϕ i de plane polarkoordinatene r og θ .

1b

Vis at nivåkurvene (ekviskalarflatene) til ψ og ϕ står normalt på hverandre.

Oppgave 2

Vi skal se på potensialstrøm i tredimensjonalt rom. Spesielt skal vi se på hastighetspotensialet $\phi_0(\mathbf{r}) = -\frac{A}{r}$ hvor $r = |\mathbf{r}|$ er avstanden fra origo til punktet med posisjonsvektor $\mathbf{r}$, og A er en positiv konstant.

2a

Bestem hastighetsfeltet $\mathbf{v}_0$ tilhørende potensialet ϕ_0 . Regn ut divergensen til $\mathbf{v}_0$. Har feltet $\mathbf{v}_0$ en strømfunksjon?

(Fortsettes på side 2.)

2b

Gi feltet $\mathbf{v}_0$ et navn som forklarer hva slags felt dette er. Det er vanlig å la “styrken” til dette feltet være definert som fluksen gjennom en kontrollflate. Forklar hvordan du vil legge kontrollflaten. Regn ut “styrken”. Er “styrken” avhengig av formen til kontrollflaten? Begrunn svaret.

Vi skal nå beskrive et nytt hastighetspotensial ϕ som er en superposisjon av to hastighetspotensialer av typen ϕ_0 som begge er forskjøvet langs z -aksen. Vi skal la $\phi(\mathbf{r}) = \phi_0(\mathbf{r} - a\mathbf{k}) + \phi_0(\mathbf{r} + a\mathbf{k})$ hvor a er en positiv konstant og $\mathbf{k}$ er koordinatenhetsvektor langs z -aksen.

2c

Finn hastighetsfeltet $\mathbf{v}$ tilhørende det nye feltet ϕ . Undersøk om origo er et stagnasjonspunkt for det nye feltet. Undersøk om z -aksen er en strømlinje for det nye feltet.

Hint: Det anbefales å bruke kartesiske koordinater.

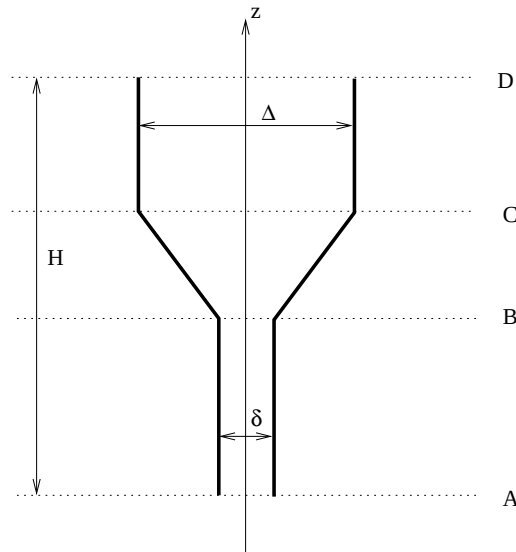
2d

Regn ut fluksen av $\mathbf{v}$ ut gjennom kuleskallet $r = |\mathbf{r}| = 2a$.

Oppgave 3

Vi skal betrakte strømming av vann gjennom en sylinderformet trakt. Vi lar z -aksen peke opp og være symmetriaksen til trakten. Et vertikalt snitt gjennom symmetriaksen er vist i figuren. Tyngdens akselerasjon g virker ned. Vannet har konstant tetthet ρ . Nederste del av trakten mellom A og B har diameter δ . Ved nedre kant A antar vi strømmingen er vertikal med konstant fart u . Øverste del av trakten mellom C og D har diameter Δ . Ved øvre kant D antar vi strømmingen er vertikal med konstant fart U . Den totale høyden mellom A og D er H . Vi antar at vannet til enhver tid fyller trakten fra nedre kant A til øvre kant D. Trakten er omgitt av luft med konstant trykk p_0 , og vi antar at vannet også har trykk p_0 ved øvre kant D og nedre kant A. Vi har at $\delta < \Delta$, men vi kan ikke anta at $\delta \ll \Delta$.

(Fortsettes på side 3.)

**3a**

Bestem sammenhengen mellom u og U . Forklar hvilken bevaringslov du benytter for å bestemme denne sammenhengen.

3b

Skriv ned Bernoullis likning og forklar betingelsene for å bruke den.

3c

Bestem volumfluksen gjennom traktet. Svaret skal ikke uttrykkes ved u eller U , men kan uttrykkes ved hvilke som helst av de andre fysiske størrelsene $\delta, \Delta, H, g, \rho, p_0$. Vil fluksen øke eller avta dersom den totale høyden H økes?

3d

På ethvert infinitesimalt flateelement $d\sigma$ på traktveggen vil det virke en infinitesimal kraft $d\mathbf{F}$ som en konsekvens av at vannet på innsiden har trykk p og lufta på utsiden har trykk p_0 . Finn trykket p i vannet i en høyde h over nedre kant A et sted mellom A og B. Vi forutsetter at strømmingen er vertikal med konstant fart u for denne verdien av z . Finn deretter den infinitesimale kraften $d\mathbf{F}$ (både retning og størrelse) som virker på flateelementet på traktveggen for denne verdien av z . Vil traktveggen presses ut eller inn mellom A og B?

Hint: Det anbefales å benytte sylinderkoordinater r, θ og z , hvor xy -planet er horisontalt med $x = r \cos \theta$ og $y = r \sin \theta$.

SLUTT