UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.
Eksamensdag:	Tirsdag 5 juni 2018.
Tid for eksamen:	09:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formeltillegg på 2 sider.
Tillatte hjelpemidler:	K. Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Det er 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1

Et vektorfelt er gitt på dimensjonsløs form ved

$$\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$$

1a

Regn ut divergensen og virvlinga til $\boldsymbol{v}$.
Navngi tydelig hva som er divergens og hva som er virvling.

1b

Undersøk om $\boldsymbol{v}$ har et skalarpotensial ϕ, og finn i så fall potensialet.
Undersøk om $\boldsymbol{v}$ har en strømfunksjon ψ, og finn i så fall strømfunksjonen.

1c

Tegn en skisse som viser følgende:

1. Stagnasjonspunkt (hvor $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$) avmerkes med $\bullet$
2. Vektorfeltet tegnes med piler med riktig retning og riktig relativ lengde.
3. Strømlinjer tegnes med heltrukken strek.
4. Dersom skalarpotensialet ϕ eksisterer tegnes ekvipotensialkurver med stiplet strek.

(Fortsettes på side 2.)

1d

Regn ut sirkulasjonen rundt en sirkel med sentrum i origo og enhets radius ($x^2 + y^2 = 1$). Gjør dette ved direkte utregning som kurveintegral.
Gjør dette også som et flateintegral ved å anvende en passende integralsats. Hva heter integralsatsen?

Oppgave 2

Ei kule laget av et fast stoff er varmet opp på en slik måte at temperaturen ved tidspunktet $t = t_0$ er $T(\boldsymbol{r}, t_0) = T_0 e^{-\alpha r^2} + T_1$. Her er $\boldsymbol{r}$ en posisjonsvektor, origo er midtpunktet i kula, og $r = |\boldsymbol{r}|$ er avstanden fra origo. Størrelsene T_0, T_1 og α er konstanter.
Det vil være en varmefluks i kula bestemt av Fouriers lov som sier at varmefluksstettheten er gitt ved $\boldsymbol{H} = -k\nabla T$ hvor k er varmeledningstallet til kulas materiale.
Temperaturen i kula vil endre seg i henhold til varmelikninga $\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T$ hvor κ er varmediffusiviteten til kulas materiale.
I denne oppgaven antar vi at kula er et homogent fast stoff der temperaturen kun er funksjon av radius r og tiden t.
Det er mest naturlig å behandle dette problemet med kulekoordinater $\{r, \theta, \phi\}$ som står oppsummert på formelarket.

2a

Redegjør for de fysiske enhetene til α, κ, k, $\boldsymbol{H}$ og T_0.

2b

Regn ut varmefluksstettheten $\boldsymbol{H}$ ved tidspunktet $t = t_0$.
Regn ut den integrerte varmefluksen ut gjennom et kuleskall med radius $r = R$ ved tidspunkt $t = t_0$.

2c

Ved tidspunktet $t = t_0$ vil temperaturen øke noen steder i kula, mens temperaturen vil avta andre steder i kula. Bestem hvor temperaturen vil øke og hvor den vil avta.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 3

I figuren ser vi et fotografi av et demonstrasjonsforsøk vi gjorde i løpet av våren. Et gjennomsiktig sylinderformet kar er delvis fyllt med vann som vi har fått til å rotere rundt den vertikale senteraksen. Vi ser at vannoverflaten da har fått en spesiell form.

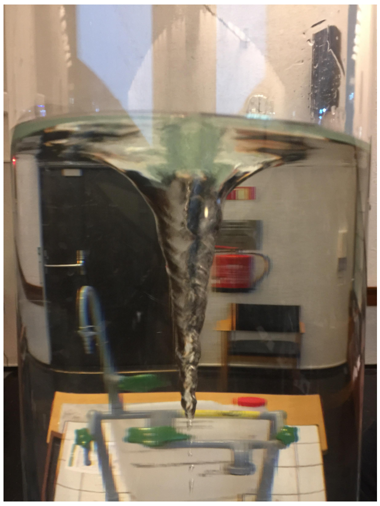

Foto: Jon Kristian Dahl

I denne oppgaven skal vi anta at hastighetsfeltet til vannet er gitt ved

$$\boldsymbol{v} = c\sqrt{r}\,\boldsymbol{i}_\theta,$$

og vi skal undersøke om dette hastighetsfeltet kan medføre en form på vannoverflaten tilsvarende den vi ser på bildet.
I formelen for hastighetsfeltet er c en konstant. Vi benytter sylinderkoordinater $\{r, \theta, z\}$ hvor z-aksen peker oppover langs senteraksen i sylinderen og r er radiell avtand fra senteraksen. Vinkelen θ ligger i horisontalplanet og har tilhørende enhets-koordinatvektor $\boldsymbol{i}_\theta$.

3a

Regn ut divergensen og virvlinga til $\boldsymbol{v}$.
Navngi tydelig hva som er divergens og hva som er virvling.

3b

Finn strømlinjene.
Regn ut akselerasjonen til en vannpartikkel.

3c

Bruk Eulers bevegelseslikning til å finne trykket p overalt i vannet.
På vannoverflaten, $z = \eta(r)$, pålegger vi randkrav at trykket i vannet er lik det konstante lufttrykket p_0. Bestem formen til vannoverflaten.

(Det er ikke sikkert at den formen du finner stemmer fullstendig overens med bildet.)

SLUTT