EKSAMEN MEK1100 19/3 2004 (MIDTVEIS)

Eksamensoppgaven har 20 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum 0-5 (5 for rett svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1. Gitt skalarfunksjonen $\beta = a(x^2 - y^2)$, hvor x, y er kartesiske koordinater og a er en konstant. Enhetsvektorene i x- og y-retning betegnes henholdsvis med $\boldsymbol{i}$ og $\boldsymbol{j}$.

a) Finn likningen or ekviskalarlinjene for β.

b) Skisser ekviskalarlinjene $\beta = 0$ og $\beta = \pm a$.

c) Finn gradientvektoren $\nabla\beta$.

d) Sett $a = \frac{1}{2}$. Bestem gradientvektoren $\nabla\beta$ i de fire punktene med koordianter (1,0), (0,1), (-1,0) og (0,-1). Skisser gradientvektorene inn på tegningen i b).

e) Finn x- og y-komponentene av vektoren $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{k} \times \nabla\beta$ hvor $\boldsymbol{k}$ er enhetsvektoren normalt xy-planet.

f) Forklar hvorfor vektoren $\boldsymbol{v}$ står normalt på vektoren $\nabla\beta$.

Oppgave 2. Vi skal regne med to vektorfelt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= -x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{v}_2 &= (xy - xz)\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}y^2\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

hvor x, y og z er kartesiske koordinater og $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ og $\boldsymbol{k}$ er de respektive enhetsvektorene.

a) Skisser vektorfeltet $\boldsymbol{v}_1$ ved å tegne noen vektorer på koordinataksene og ellers i feltet.

b) Finn divergensen $\nabla \cdot \boldsymbol{v}_1$.

c) Finn virvlingen $\nabla \times \boldsymbol{v}_1$.

d) Hvorfor eksisterer det en strømfunksjon (feltfunksjon) for vektorfeltet $\boldsymbol{v}_1$?

e) Finn strømfunksjonen ψ_1.

f) Tegn strømlinjene (feltlinjene) $\psi_1 = 0$ og $\psi_1 = \pm 1$ inn på plottet i a).

g) Finn divergensen til vektorfeltet $\boldsymbol{v}_2$.

h) Finn virvlingen til vektorfeltet $\boldsymbol{v}_2$.

i) Hvorfor eksisterer det ikke en strømfunksjon (feltfunksjon) for feltet $\boldsymbol{v}_2$?

Oppgave 3. Gitt et tre-dimensjonalt strømfelt $\boldsymbol{v}$ hvor komponentene (v_x, v_y, v_z) i et kartesisk koordinatsystem er funksjoner av koordinatene x, y og z.

a) Definer sirkulasjonen, C, av vektoren $\boldsymbol{v}$ omkring en lukket kurve λ.

b) Definer volumstrømmen (vektorfluksen), Q, av vektoren $\boldsymbol{v}$ gjennom en lukket flate σ.

c) Skriv opp (uten bevis) Stokes' sats og definer størrelsene som inngår.

d) Skriv opp (uten bevis) Gauss' sats og definer størrelsene som inngår.

e) Sett $v_x = x$, $v_y = y$ og $v_z = z$ og regn ut volumstrømmen gjennom en kule med radius a og sentrum i origo. Hva blir resultatet om sentrum av kulen flyttes til et annet punkt?