UNIVERSITETET I OSLO
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Underveiseksamen i:	MEK1100 – Feltteori og vektoranalyse.
Eksamensdag:	Mandag 11/10, 2004.
Tid for eksamen:	Kl. 14.30–17.30.
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Mathematische Formelsammlung, godkjent kalkulator.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Eksamensoppgavene har 20 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum 0–5 (5 for rett svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1. Gitt skalarfunksjonen $\beta = xy$, hvor x, y er kartesiske koordinater. Enhetsvektorene i x- og y-retning betegnes henholdsvis med $\boldsymbol{i}$ og $\boldsymbol{j}$.

a) Finn likningen for ekviskalarlinjene for β.

b) Skisser ekviskalarlinjene $\beta = 0$ og $\beta = \pm 1$.

c) Finn gradientvektoren $\nabla\beta$.

d) Bestem gradientvektoren $\nabla\beta$ i de fire punktene med koordinater (1,1), $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, og $(1, -1)$. Skisser gradientvektorene inn på tegningen i b).

e) Beregn kurveintegralet $W = \int_K \nabla\beta \cdot d\boldsymbol{r}$ langs en rett linje fra origo til punktet (1,1).

f) Forklar hvorfor kurveintegralet W vil få samme verdi uansett hvilke kurve vi integrerer langs mellom de to punktene.

Oppgave 2. Vi skal regne med to vektorfelt

$$\boldsymbol{v}_1 = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{v}_2 = (x + \tfrac{1}{2}y^2)\boldsymbol{i} + (xy - z)\boldsymbol{j} + (y - z - xz)\boldsymbol{k}$$

hvor x, y og z er kartesiske koordinater og $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ og $\boldsymbol{k}$ er de respektive enhetsvektorene.

a) Skisser vektorfeltet $\boldsymbol{v}_1$ ved å tegne noen vektorer på koordinataksene og ellers i feltet.

b) Finn divergensen $\nabla \cdot \boldsymbol{v}_1$.

c) Finn virvlingen $\nabla \times \boldsymbol{v}_1$.

d) Hvorfor eksisterer det en strømfunksjon (feltfunksjon) for vektorfeltet $\boldsymbol{v}_1$?

e) Finn strømfunksjonen ψ_1.

f) Tegn strømlinjene (feltlinjene) $\psi_1 = \frac{1}{2}, 1, 2$ inn på plottet i a).

g) Finn divergensen til vektorfeltet $\nabla \cdot \boldsymbol{v}_2$.

h) Finn virvlingen til vektorfeltet $\nabla \times \boldsymbol{v}_2$.

i) Hvorfor eksisterer det ikke en strømfunksjon (feltfunksjon) for feltet $\boldsymbol{v}_2$?

Oppgave 3. Gitt et 3-dimensjonalt strømfelt $\boldsymbol{v}$ hvor komponentene (v_x, v_y, v_z) i et kartesisk koordinatsystem er funksjoner av koordinatene x, y og z.

a) Definer sirkulasjonen, C, av vektoren $\boldsymbol{v}$ omkring en lukket kurve λ.

b) Skriv opp (uten bevis) Stokes sats og definer størrelsene som inngår.

c) Hva er forskjellen på Stokes og Greens sats?

d) Sett $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2$ fra Oppgave 2 og bestem sirkulasjonen om en sirkel i xy-planet med radius a og sentrum i origo.

e) Hva blir sirkulasjonen omkring en sirkel i yz-planet med radius a og sentrum i origo?

SLUTT