UNIVERSITETET I OSLO
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Underveiseksamen i:	MEK1100 – Feltteori og vektoranalyse.
Eksamensdag:	Torsdag 17/3, 2005.
Tid for eksamen:	Kl. 09.00–12.00.
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Mathematische Formelsammlung, godkjent kalkulator.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Eksamensoppgavene har 20 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum 0–5 (5 for rett svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1. Gitt skalarfunksjonen $\beta = a(x^2 + y^2)$, hvor x, y er kartesiske koordinater og a er en positiv konstant. Enhetsvektorene i x- og y-retning betegnes henholdsvis med $\boldsymbol{i}$ og $\boldsymbol{j}$.

a) Finn likningen for ekviskalarlinjene for β.

b) Skisser ekviskalarlinjene $\beta = a, 4a, 9a$.

c) Finn gradientvektoren $\nabla\beta$.

d) Bestem gradientvektoren $\nabla\beta$ i de fire punktene med koordinater (1,0) (0,1), $(-1, 0)$ og $(0, -1)$. Velg $a = 1/2$ og skisser gradientvektorene inn på tegningen i b).

e) Finn x- og y-komponentene av vektoren $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{k} \times \nabla\beta$ hvor $\boldsymbol{k}$ er enhetsvektoren normalt xy-planet og tegn vektoren $\boldsymbol{v}$ i de fire punktene nevnt i d) på samme tegningen.

f) Finn størrelsen (lengden) av vektoren $\boldsymbol{v}$ på sirkelen med radius r og sentrum i origo.

g) Beregn sirkulasjonen $C = \oint \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}$ om sirkelen definert i f).

Oppgave 2. Vi skal regne med to vektorfelt

$$\boldsymbol{v}_1 = a\big[(x^2 - y^2)\boldsymbol{i} - 2xy\boldsymbol{j}\big]$$
$$\boldsymbol{v}_2 = (x + y)\boldsymbol{i} + (y + z)\boldsymbol{j} + (z + x)\boldsymbol{k}$$

hvor x, y og z er kartesiske koordinater og $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ og $\boldsymbol{k}$ er de respektive enhetsvektorene og a er en konstant skaleringsfaktor ($a > 0$).

a) Skisser vektorfeltet $\boldsymbol{v}_1$ ved å tegne noen vektorer på koordinataksene og på linjene $y = \pm\sqrt{3}\, x$. Velg $a = 1/4$.

b) Finn divergensen $\nabla \cdot \boldsymbol{v}_1$.

c) Finn virvlingen $\nabla \times \boldsymbol{v}_1$.

d) Hvorfor eksisterer det en strømfunksjon (feltfunksjon) ψ_1 for vektorfeltet $\boldsymbol{v}_1$?

e) Finn strømfunksjonen ψ_1.

f) Tegn strømlinjene (feltlinjene) $\psi_1 = 0$ inn på plottet i a).

g) Finn divergensen $\nabla \cdot \boldsymbol{v}_2$.

h) Finn virvlingen $\nabla \times \boldsymbol{v}_2$.

i) Hvorfor eksisterer det ikke en strømfunksjon (feltfunksjon) for feltet $\boldsymbol{v}_2$?

Oppgave 3. Gitt et 3-dimensjonalt strømfelt $\boldsymbol{v}$ med komponentene (v_x, v_y, v_z) i et kartesisk koordinatsystem x, y og z.

a) Definer volumstrømmen (vektorfluksen) Q av vektoren $\boldsymbol{v}$ gjennom en lukket flate σ.

b) Skriv opp (uten bevis) Gauss sats og definer alle størrelsene som inngår.

c) Finn volumstrømmen Q gjennom en vilkårlig lukket flate σ når $\boldsymbol{v}$ er en konstant vektor.

d) Sett $v_x = x + y$, $v_y = y + z$ og $v_z = z + x$ og finn volumstrømmen gjennom en kuleflate med radius r og sentrum i origo.

SLUTT