i Viktig informasjon

MEK1100 - Feltteori og vektoranalyse
Torsdag 23. mars 2023
kl. 09.00 - 11.00 (to timer)

Det er 15 spørsmål. Alle spørsmålene teller like mye. Det er bare ett riktig alternativ på hvert spørsmål. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på et spørsmål, får du 0 poeng. Du blir altså ikke *straffet* for å gjette.

Tillatte hjelpemidler: K. Rottmann: Matematische Formelsamlung og godkjent kalkulator.

Lykke til!

1 Dimensjon av vektorfelt

Divergensen til vektorfeltet $\vec{u}$ er dimensjonsløst. Hva er de fysiske dimensjonene til $\vec{u}$?
Velg ett alternativ:

m $1/m$ Nm s m/s

2 Divergens av vektor

Hva er divergensen til $\vec{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$?
Velg ett alternativ:

$y + x$ 0 $x + y + z$ y 1

3 Virvling av vektor

Hva er virvlingen til $\vec{u} = yz(\mathbf{j} + \mathbf{k})$?
Velg ett alternativ:

- $\mathbf{i}(y - z)$
- $\mathbf{i}(z - y)$
- $\vec{0}$
- $\mathbf{i}(z - y) + \mathbf{j}(y - z) + \mathbf{k}(y - z)$
- $\mathbf{k}(z - y)$

4 Skalarpotensiale av vektorfelt

Et vektorfelt er gitt ved $\vec{v} = \vec{r} - 3(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ der $\vec{r}$ er posisjonsvektoren. Hva er skalarpotensialet til $\vec{v}$?
Velg ett alternativ:

- **Har ikke skalarpotensial.**
- $\frac{1}{2}\vec{r} \cdot \vec{r} + 3(x + y + z)$
- $\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$
- $\frac{1}{2}\vec{r} \cdot \vec{r} - 3(x + y + z)$
- $\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - 3$

5 Kurveintegral

En ellipse C er parametrisert ved $\vec{r} = \cos\theta\mathbf{i} + 2\sin\theta\mathbf{k}$, der $\theta \in [0, 2\pi]$. Gitt et vektorfelt $\vec{v} = \frac{1}{2}z\mathbf{k}$. Hva blir kurveintegralet $\oint_C \vec{v} \times d\vec{r}$ i retning mot klokka? (Hint: $\int \sin^2\theta d\theta = \frac{1}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta) + \mathbf{konstant}$)
Velg ett alternativ:

- $(\mathbf{i} + \mathbf{k})2\pi$
- $\mathbf{k}\pi$
- $\vec{0}$
- $\mathbf{j}2\pi$
- $-\mathbf{j}\pi$

6 Taylor serie i to variable

En funksjon er gitt ved $f(x, y) = e^x \cos y$. Hvilket alternativ er en første ordens Taylor approksimasjon til f rundt origo?
Velg ett alternativ:

- $f(x, y) \approx x$
- $f(x, y) \approx x \sin y - y \cos x$
- $f(x, y) \approx 1 + x$
- $f(x, y) \approx x + y$
- $f(x, y) \approx xe^x \cos y - ye^x \sin y$

7 Flateelement

En flate er parametrisert med $\vec{r}(u, v) = u\cos v\mathbf{i} - u\sin v\mathbf{k}$. Hva er flateelementet $d\sigma$?
Velg ett alternativ:

- $\mathbf{k}dudv$
- $ududv$
- $dudv$
- $vdudv$
- $\mathbf{k}dudv$

8 Sirkulasjon av vektorfelt II

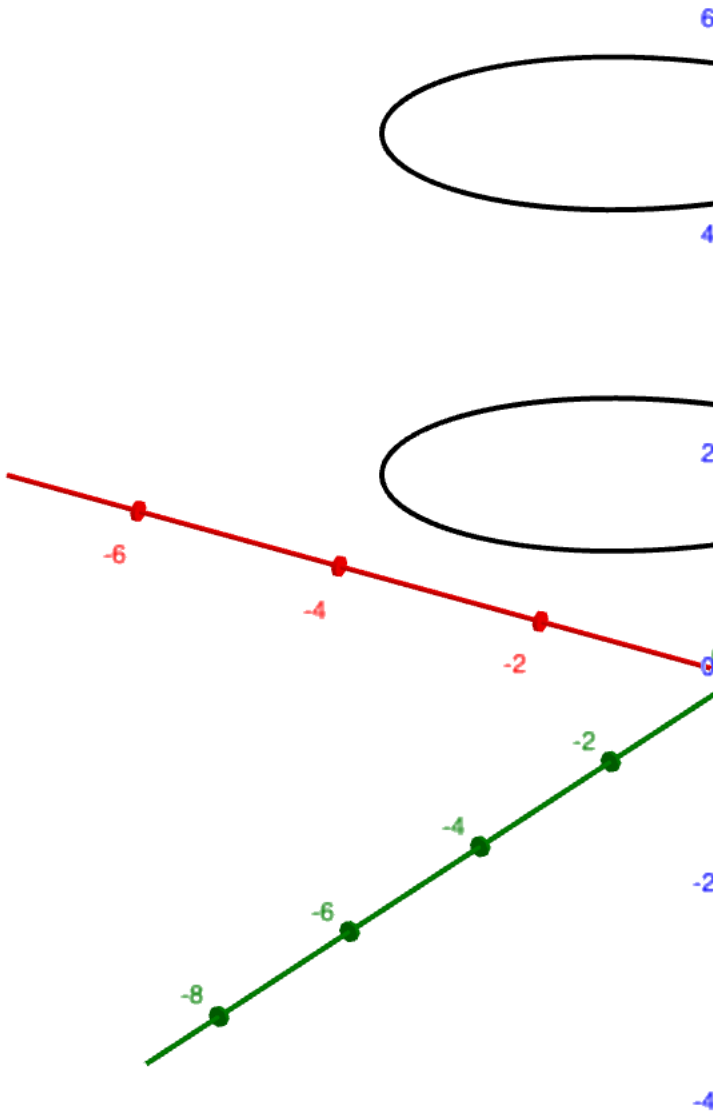
Et vektorfelt er gitt ved $\vec{u} = xy\hat{\imath}$. Hva blir sirkulasjonen $\oint_C \vec{u} \cdot d\vec{r}$ rundt en trekant med hjørner i (0, 0), (1, 0) og (0, -1)? Sirkulasjonen går med klokka, dvs fra (0, 0) til (1, 0), så til (0, -1) og til slutt tilbake til (0, 0).

Velg ett alternativ:

$\frac{1}{6}$ 1 $-\frac{1}{6}$ 0 -1

9 Buelengde

En spiral er parametrisert ved $\vec{r}(t) = 3\sin(2t)\mathbf{i} + 3\cos(2t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ der $t \in [0, 2\pi]$. Hva er buelengden til spiralen?


6
4
2
-6
-4
-2
-2
-4
-6
-8
-2
-4

Velg ett alternativ:

- $2\pi\sqrt{35}$
- 12π
- 13π
- 11π
- $2\pi\sqrt{37}$

10 Volumstrøm

Gitt et strømningsfelt med hastighetsvektor $\vec{u}$, og en vilkårlig lukket flate A med enhetsflatenormalvektor $\vec{n}$. Hvilket alternativ representerer volumstrømmen (fluksen) av $\vec{u}$ gjennom flaten A?

Velg ett alternativ:

- $\oint_A \vec{u} \cdot \vec{n} d\sigma$
- $\int_A \nabla \cdot \vec{u} d\sigma$
- $\oint_A \vec{u} \times \vec{n} d\sigma$
- $\int_A \vec{u} \times \vec{n} d\sigma$
- $\int_A \vec{u}\, \vec{n} d\sigma$

11 Strømlinjer

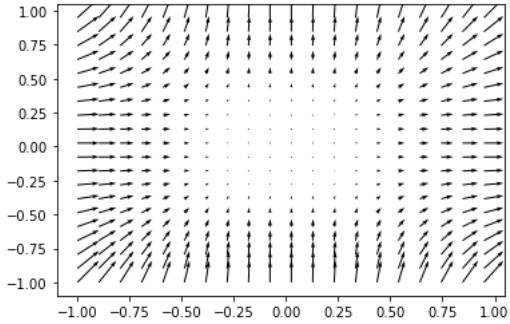
Hvilket av følgende alternativer beskriver strømlinjer til vektorfeltet $\vec{u} = z\mathbf{i} - x\mathbf{k}$?

Velg ett alternativ

- Rette linjer parallelle med z-aksen
- Sirkler rundt origo i x-z planet
- Rette linjer parallelle med x- og z-aksene
- Sirkler rundt origo i x-y planet
- Rette linjer parallelle med x-aksen

12 Pilplott

Hvilket vektorfelt svarer pilplottet til?



Velg ett alternativ:

$\vec{u} = xy\mathbf{i} + yx\mathbf{j}$

$\vec{u} = \sin(2x\pi)\mathbf{i} + \cos(2y\pi)\mathbf{j}$

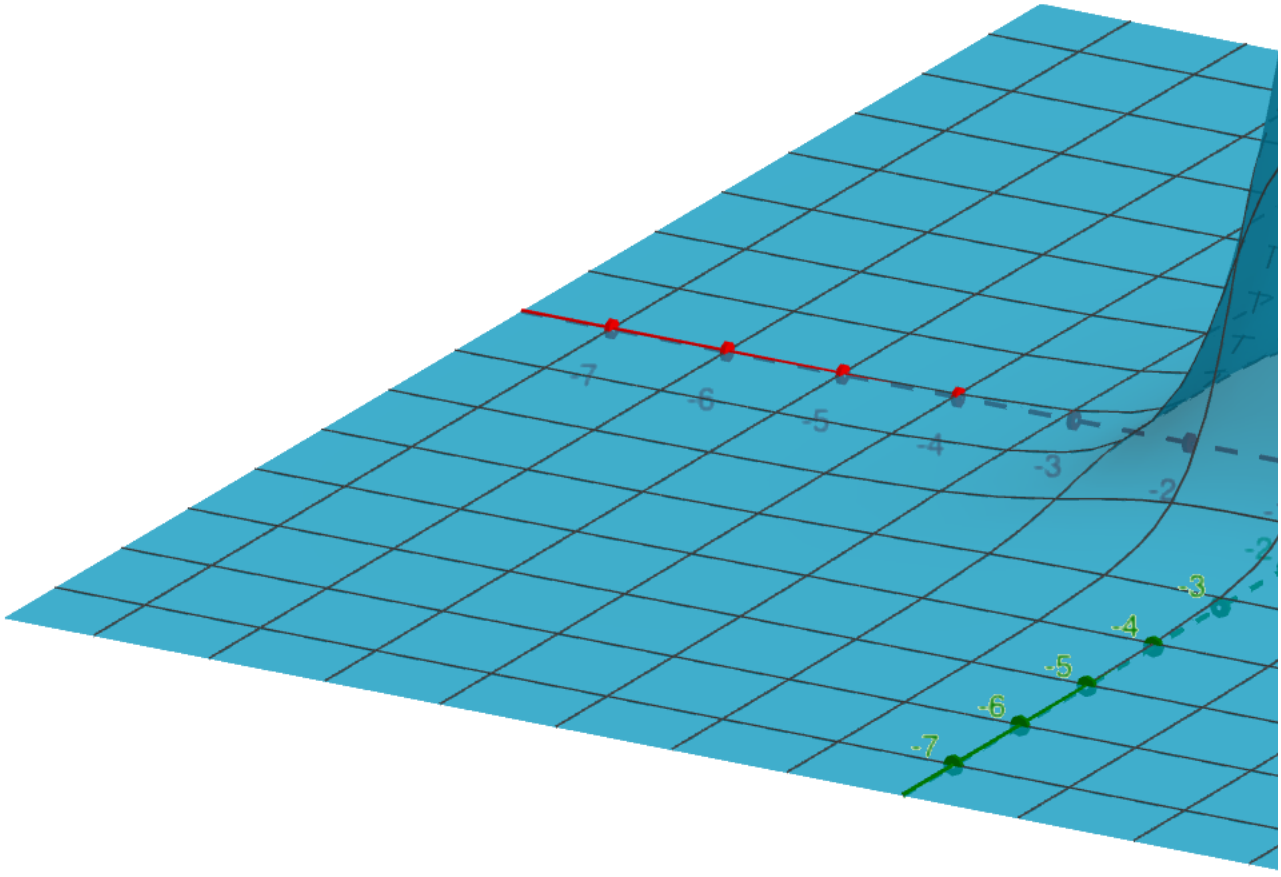
$\vec{u} = -x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$

$\vec{u} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$

$\vec{u} = x^2\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$

13 Flateelement II

En flate A er beskrevet av $z = \frac{1}{1+x^4+y^4}$. Flaten er illustrert under. Hva er flateelementet $\vec{n}d\sigma$ til A når $\vec{n}$ peker i positiv z-retning?

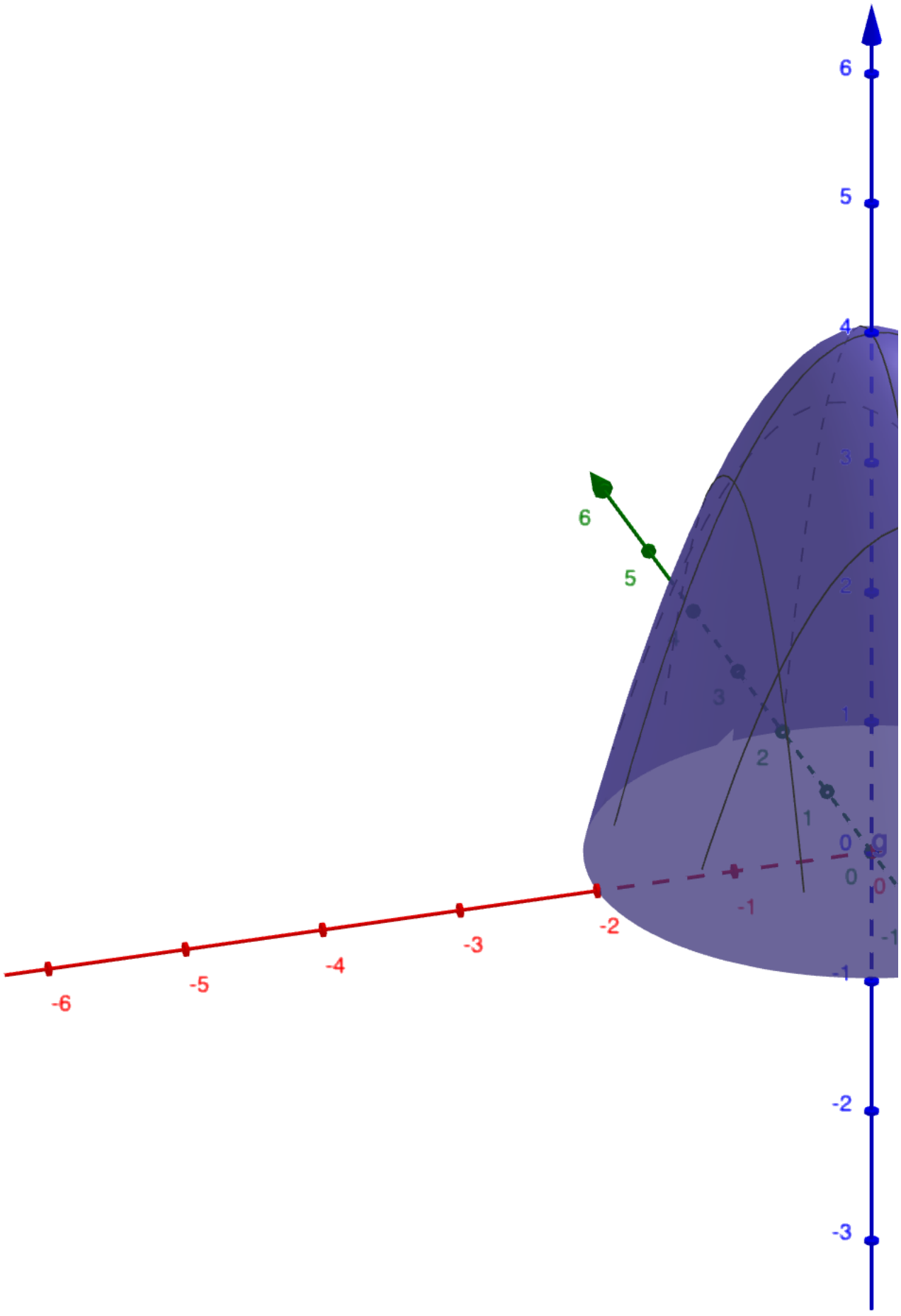

-7
-6
-5
-4
-3
-2
-3
-4
-5
-6
-7

Velg ett alternativ

- $\mathbf{k}dxdy$
- $(\frac{4x^3}{(1+x^4+y^4)^2}\mathbf{i}+\frac{4y^3}{(1+x^4+y^4)^2}\mathbf{j}+\mathbf{k})dxdy$
- $dxdy$
- $(\frac{4y^3}{(1+x^4+y^4)^2}\mathbf{i}+\frac{4x^3}{(1+x^4+y^4)^2}\mathbf{j}+\mathbf{k})dxdy$
- $(\frac{4x^3}{(1+x^4+y^4)^2}\mathbf{i}-\frac{4y^3}{(1+x^4+y^4)^2}\mathbf{j}+\mathbf{k})dxdy$

14 Fluks

En flate S er gitt ved $z = 4 - x^2 - y^2$ og $z \geq 0$ som illustrert under. Hva blir fluksen av vektorfeltet $\vec{v} = \mathbf{k}$ gjennom flaten S? La normalvektoren til S peke ut av flaten og oppover, som vist under.

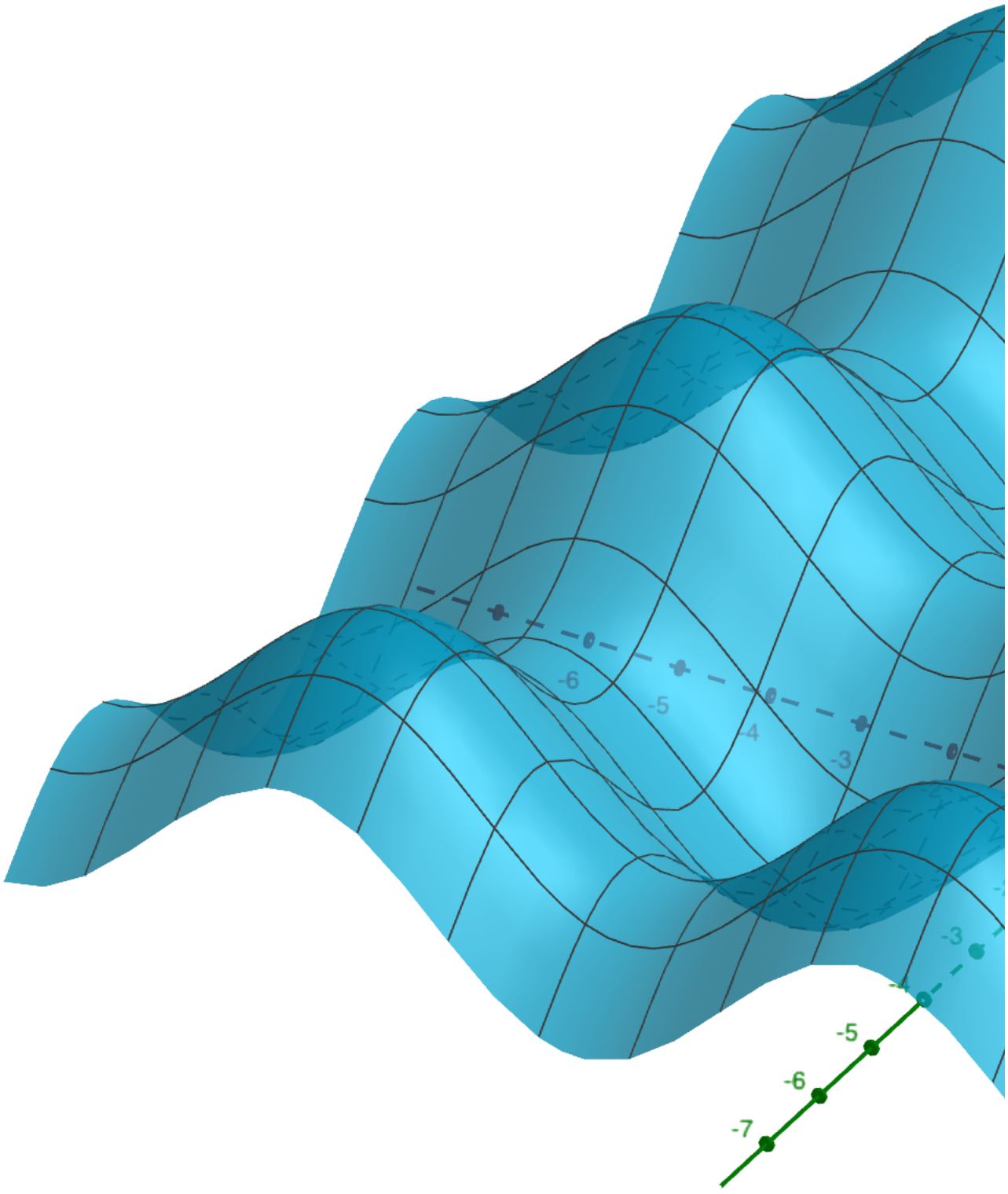

6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
6
5

Velg ett alternativ:

0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π	4π
○	○	○	○	○

15 Retningsderivert

Et funksjon $f(x, y) = 2 + \sin x + \cos y$, er illustrert som høyden z i figuren under. Figuren viser derfor en ekviskalarflate til skalarfeltet $\beta(x, y, z) = f(x, y) - z$. Vi har markert inn et punkt P i flaten ved $(x, y, z) = (2, -2, f(2, -2))$. Hva er den retningsderiverte av $\beta(x, y, z)$ i punktet P i den retningen som peker direkte inn mot z-aksen (dvs, i retningen $\mathbf{j} - \mathbf{i}$)?


-6
-5
-4
-3
-3
-5
-6
-7

Velg ett alternativ:

$\frac{-1}{\sqrt{2}}(\cos 2 + \sin 2)$ $\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 2 - \sin 2)$ 0 $\sin 2 - \cos 2$ $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin 2 - \cos 2)$