Viktig informasjon

MEK1100 - Feltteori og vektoranalyse
Midtveiseksamen
Fredag 21. mars 2025
kl. 15.00 - 17.00 (to timer)

Det er 15 spørsmål. Alle spørsmålene teller like mye. Det er bare ett riktig alternativ på hvert spørsmål. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på et spørsmål, får du 0 poeng. Du blir altså ikke *straffet* for å gjette.

Tillatte hjelpemidler: K. Rottmann: Matematische Formelsamlung og godkjent kalkulator.

Lykke til!

1 Dimensjon av vektorfelt

Divergensen til vektorfeltet $\vec{u}$, $\nabla \cdot \vec{u}$, har fysisk dimensjon areal. Hva er den fysiske dimensjonen til $\vec{u}$?

Velg ett alternativ:

$lengde$	$volum$	$areal$	$akselerasjon$	$fart$
○	○	○	○	○

Maks poeng: 1

2 Divergens av vektorfelt

Hva er divergensen til $\vec{u} = x^2\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$?

Velg ett alternativ:

$2x$	$x^2 + xz + xy$	$2x\mathbf{i}$	$-y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$	$2\mathbf{i}$
○	○	○	○	○

Maks poeng: 1

3 Virvling av vektorfelt

Hva er virvlingen til $\vec{u} = x\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + \frac{1}{2}x^2\mathbf{k}$?

Velg ett alternativ:

- $\mathbf{i} + z\mathbf{j}$
- $1 + z$
- $-y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$
- $x + yz + \frac{1}{2}x^2$
- $y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

Maks poeng: 1

4 Skalarpotensial av vektorfelt

Et vektorfelt er gitt ved $\vec{v} = \vec{r} + 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ der $\vec{r}$ er posisjonsvektoren. Hva er et mulig skalarpotensial til $\vec{v}$?

Velg ett alternativ:

- $\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + 2$
- $\frac{1}{2}\vec{r} \cdot \vec{r} + x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2$
- $\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$
- $\frac{1}{2}\vec{r} \cdot \vec{r} + 2x - y + z - 5$
- Har ikke skalarpotensial.

Maks poeng: 1

5 Kurveintegral

En kurve C er parametrisert ved $\vec{r} = 2\cos\theta\mathbf{i} - \theta\mathbf{j}$, der $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Gitt et vektorfelt $\vec{v} = y\mathbf{j}$.
Hva blir kurveintegralet $\int_C \vec{v} \times d\vec{r}$?

Velg ett alternativ:

$2\mathbf{k}$	π	$\mathbf{k}\frac{\pi}{2}$	-2	$-2\mathbf{k}$
○	○	○	○	○

Maks poeng: 1

6 Taylor rekke i to variable

En funksjon er gitt ved $f(x,y) = e^{x+y}\sin x$. Hvilket alternativ er en andre ordens Taylor approksimasjon til f rundt origo?

Velg ett alternativ:

- $f(x,y) \approx x + x^2 + xy$
- $f(x,y) \approx x + xy$
- $f(x,y) \approx x + x^2 + \frac{1}{2}xy$
- $f(x,y) \approx 1 + (x+y)\sin x$
- $f(x,y) \approx x + 2x^2 + xy$

Maks poeng: 1

7 Flateelement

En flate er parametrisert med $\vec{r}(u,v) = uv\mathbf{i} + u^2\mathbf{j}$. Hva er flateelementet $d\sigma$?
Velg ett alternativ:

$2u^2\mathbf{k}dudv$ $\mathbf{k}dudv$ $2u^2dudv$ $dudv$ $-2u^2\mathbf{k}dudv$

Maks poeng: 1

8 Sirkulasjon av vektorfelt II

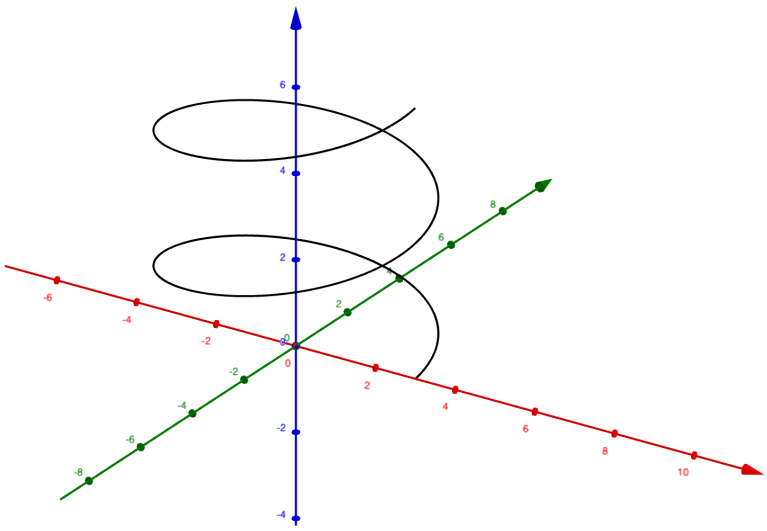
Et vektorfelt er gitt ved $\vec{u} = xy\mathbf{j}$. Hva blir sirkulasjonen $\oint_C \vec{u} \cdot d\vec{r}$ rundt en trekant med hjørner i (0, 0), (1, 1) og (0, 1)? Sirkulasjonen går mot klokka, dvs. fra (0, 0) til (1, 1), så til (0, 1) og til slutt tilbake til (0, 0).
Velg ett alternativ:

$\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ 0 $-\frac{2}{3}$

Maks poeng: 1

9 Buelengde

En spiral er parametrisert ved $\vec{r}(\theta) = \sin(2\theta)\mathbf{i} + \cos(2\theta)\mathbf{j} + \sqrt{5}\theta\mathbf{k}$ der $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Hva er buelengden til spiralen? NB! Figuren viser et større utsnitt av spiralen enn det området som skal parametriseres!



Velg ett alternativ:

- π
- $\frac{9}{2}\pi$
- 3π
- 9π
- 2π

Maks poeng: 1

10 Volumstrøm

Gitt et strømningsfelt med hastighetsvektor $\vec{u} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, og den lukkede flaten A til en enhetsterning med sider $x = 0, x = -1, y = 0, y = -1, z = 0, z = -1$. Hva er den integrerte volumstrømmen (fluksen) av $\vec{u}$ gjennom flaten A?

Velg ett alternativ:

- A
- $A\vec{u}$
- 0
- 1
- 3

Maks poeng: 1

11 Strømlinjer

Hvilket av følgende alternativer beskriver strømlinjer til vektorfeltet $\vec{u} = (y-1)\mathbf{i} + (x+1)\mathbf{j}$?

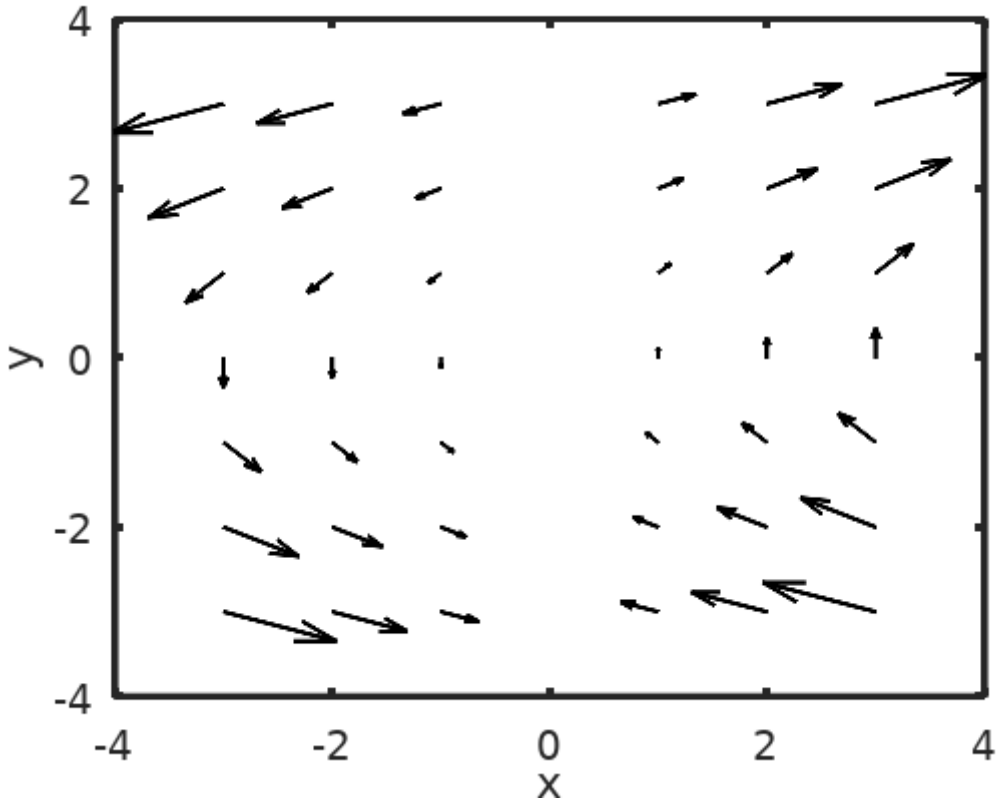
Velg ett alternativ

- Parabler i xy-planet
- Sirkler rundt origo i xy-planet
- Rette linjer i xy-planet
- Sirkler rundt et punkt utenom origo i xy-planet
- Hyperbler i xy-planet

Maks poeng: 1

12 Pilplott

Hvilket vektorfelt svarer pilplottet til?



Velg ett alternativ:

$\vec{u} = -x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$

$\vec{u} = x^2\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$

$\vec{u} = x\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$

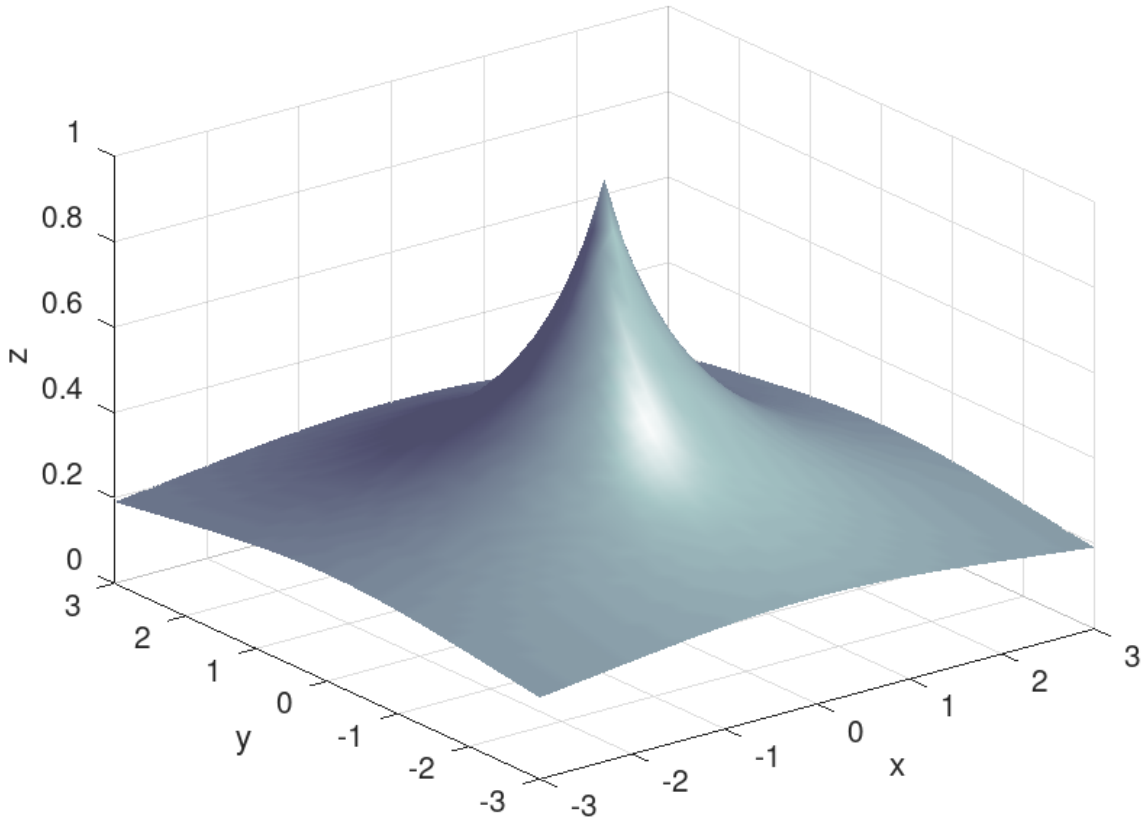
$\vec{u} = xy\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

$\vec{u} = xy\mathbf{i} - y\mathbf{j}$

Maks poeng: 1

13 Flateelement II

En flate A er beskrevet av $z = \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$. Flaten er illustrert under. Hva er flateelementet $\vec{n}d\sigma$ til A når $\vec{n}$ peker i positiv z-retning?



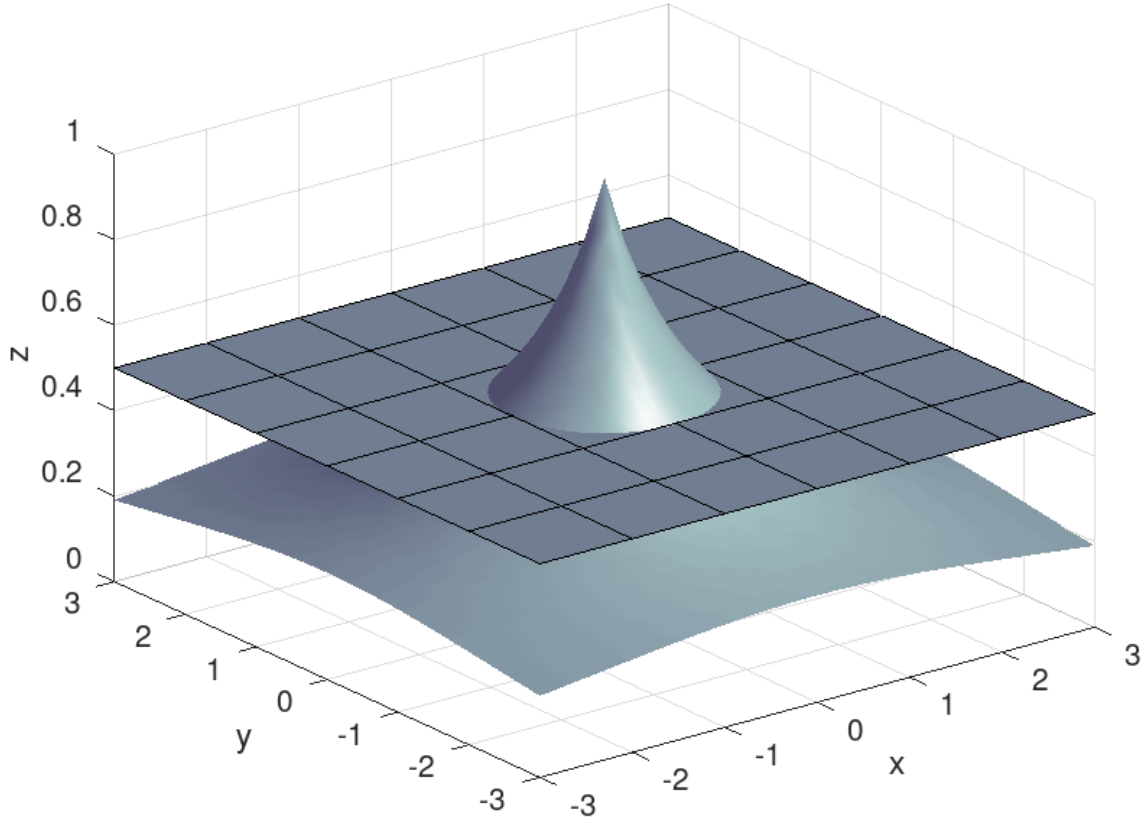
Velg ett alternativ

- $(\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{2\sqrt{x^2+y^2}(1+\sqrt{x^2+y^2})^2}+\mathbf{k})dxdy$
- $(\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{(1+\sqrt{x^2+y^2})^2}+\mathbf{k})dxdy$
- $(\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}(1+\sqrt{x^2+y^2})^2}+\mathbf{k})dxdy$
- $(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+\mathbf{k})dxdy$
- $(\frac{2x}{1+x^2+y^2}\mathbf{i}+\frac{2x}{1+x^2+y^2}\mathbf{j}+\mathbf{k})dxdy$

Maks poeng: 1

14 Fluks

En flate S er gitt ved $z = \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$ og $z \geq \frac{1}{2}$ illustrert av den delen av den krumme flaten som er over det plane kuttet i figuren under. Hva blir den integrerte fluksen av vektorfeltet $\vec{v} = \mathbf{k}$ gjennom flaten S? La normalvektoren til S peke ut av flaten og oppover langs z-aksen.



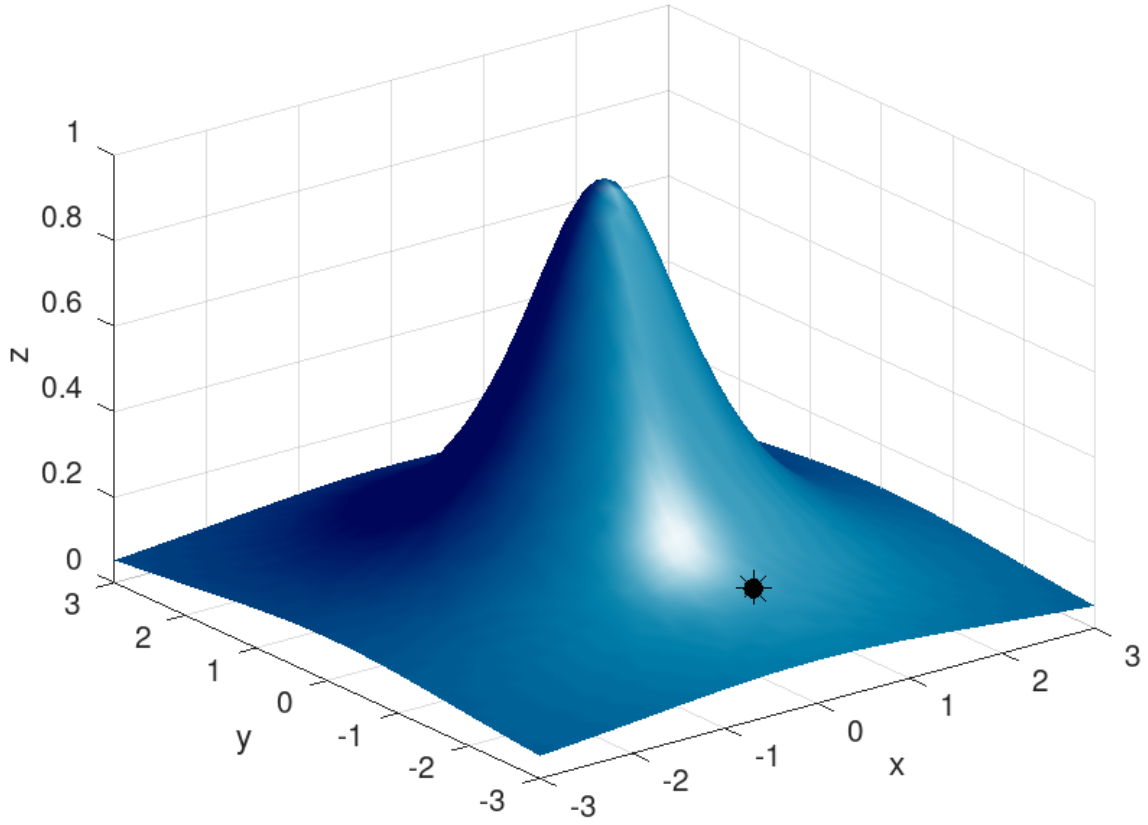
Velg ett alternativ:

∞	2π	$\frac{\pi}{2}$	4π	π
○	○	○	○	○

Maks poeng: 1

15 Retningsderivert

En funksjon $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ er illustrert som høyden z i figuren under. Figuren viser derfor en ekviskalarflate til skalarfeltet $\beta(x,y,z) = f(x,y) - z$. Vi har markert inn et punkt P i flaten ved $(x,y,z) = (0,-2,f(0,-2))$. Hva er den retningsderiverte av $\beta(x,y,z)$ i punktet P i den retningen som peker direkte inn mot z-aksen?



Velg ett alternativ:

$-\frac{2}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{4}{5}$ 0 $\frac{4}{25}$

Maks poeng: 1