

Løsningsforslag til midtveiseeksamen i
MEK1100 — “Feltteori og vektoranalyse”

Fredag 20. mars 2026, 09.00–11.00

Hjelpemidler vedlagt oppgavene: Formelark på 2 sider. Enkel kalkulator.

Tillatte hjelpemidler som kunne tas med til eksamen:

K. Rottmann: Matematische Formelsammlung. Godkjent kalkulator.

Oppgavetekst i svart. Løsningsforslag i blått. Dessverre var det noen slurvfeil i oppgaveteksten. Disse er markert i magenta. Den alvorligste feilen var at ingen av svaralternativene til oppgave 14 var riktige. For å kompensere for dette ble alle gitt “riktig” svar på oppgave 14.

Oppgave 1

Hastighetsfeltet $\mathbf{u}$ er gitt ved gradienten til skalarfunksjonen ϕ og en konstant μ ved formelen $\mathbf{u} = \mu \nabla \phi$. Konstanten μ har fysisk dimensjon lengde. Hva er den fysiske dimensjonen til skalarfunksjonen ϕ ?

La notasjonen $[a]$ bety “fysisk dimensjon til a ”. Vi har at $[\mathbf{u}]$ er lengde over tid (samme som fart), $[\mu]$ er lengde, $[\nabla]$ er 1 over lengde. Da må $[\phi]$ være lengde over tid (samme som fart).

Antall riktige svar $46/87 = 52.87\%$

Oppgave 2 Gradienten til skalarfunksjonen ϕ er gitt ved $\nabla \phi = x^2 y \mathbf{i} + x \mathbf{j} + z \mathbf{k}$. Hva er ϕ ?

Oppgaven sier at $\frac{\partial \phi}{\partial x} = x^2 y$ og $\frac{\partial \phi}{\partial y} = x$. Sjekk de blandede partiellderiverte $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial \phi}{\partial x}) = x^2$ og $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \phi}{\partial y}) = 1$. Disse er ikke like, derfor eksisterer ikke ϕ .

Antall riktige svar $47/87 = 54.02\%$

Oppgave 3

Hva er gradienten til $x^2 + y + \sin z$?

$2x \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \cos z$

Antall riktige svar $71/87 = 81.61\%$

Oppgave 4

Et vektorfelt er gitt ved $\mathbf{v} = \mathbf{r} + r^2 \mathbf{r}$ der $\mathbf{r}$ er posisjonsvektor i $\mathbb{R}^3$ (tre-dimensjonalt rom) og r er lengden av posisjonsvektor. Hva er et mulig skalar-potensial til $\mathbf{v}$?

$\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{4}r^4 + c$ hvor c er en vilkårlig konstant (for eksempel 3)

Antall riktige svar $43/87 = 49.43\%$

Oppave 5

En kurve C er parametrisert ved $\mathbf{r} = \mathbf{i} \sin \theta + 2\mathbf{k} \cos \theta$, der $0 \leq \theta \leq \pi$. Gitt et vektorfelt $\mathbf{v} = z\mathbf{j}$. Hva blir kurveintegralet $\int_C \mathbf{v} \times d\mathbf{r}$?

Regn ut $d\mathbf{r} = (\mathbf{i} \cos \theta - 2\mathbf{k} \sin \theta) d\theta$, og $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} \cos \theta$, og $\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = (-4\mathbf{i} \cos \theta \sin \theta - 2\mathbf{k} \cos^2 \theta) d\theta = (-2\mathbf{i} \sin 2\theta - (1 + \cos 2\theta)\mathbf{k}) d\theta$, og $\int_C \mathbf{v} \times d\mathbf{r} = [\mathbf{i} \cos 2\theta - \mathbf{k}(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta)]_0^\pi = -\pi\mathbf{k}$

Antall riktige svar $26/87 = 29.89\%$

Oppave 6

Hva er divergensen til $\mathbf{u} = xy\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$?

$y + xy$

Antall riktige svar $71/87 = 81.61\%$

Oppave 7

En flate er parametrisert med $\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + uv\mathbf{j}$. Hva er flateelementet $d\sigma$?

Regn ut $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i} + v\mathbf{j}$, og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{i} + u\mathbf{j}$, og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{k}(u - v)$, og $\mathbf{n} d\sigma = \pm \mathbf{k}(u - v) du dv$. Vi blir bedt om å finne $d\sigma = |\pm \mathbf{k}(u - v) du dv| = |u - v| du dv$ (under forutsetning at både du og dv er positive).

Dessverre var "riktig" løsningsforslag oppgitt uten det nødvendige absoluttverditegnet rundt $(u - v)$.

Antall riktige svar $62/87 = 71.26\%$

Oppave 8

Et vektorfelt er gitt ved $\mathbf{u} = x^2y\mathbf{j}$. Hva blir sirkulasjonen $\oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$ rundt en trekant C med hjørner i $(0, 0)$, $(1, 1)$ og $(0, 1)$ i xy -planet? Sirkulasjonen går mot klokka, dvs. fra $(0, 0)$ til $(1, 1)$, så til $(0, 1)$ og til slutt tilbake til $(0, 0)$.

Her er én mulig parametrisering:

Hypotenus C_1 fra $(0,0)$ til $(1,1)$: $\mathbf{r}(t) = t(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ for $0 \leq t \leq 1$, og $d\mathbf{r} = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) dt$, og $\mathbf{u} = t^3\mathbf{j}$, og $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = t^3 dt$, og $\int_{C_1} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{4}t^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$.

Katet C_2 fra $(1,1)$ til $(0,1)$: $\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{i} + \mathbf{j}$ for $0 \leq t \leq 1$, og $d\mathbf{r} = -\mathbf{i} dt$, og $\mathbf{u} = (1 - t)^2\mathbf{j}$, og $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = 0$, og $\int_{C_2} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

Katet C_3 fra $(0,1)$ til $(0,0)$: $\mathbf{r}(t) = (0, t)$ for $0 \leq t \leq 1$, og $\mathbf{u} = 0$, og $\int_{C_3} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

Svaret er $\frac{1}{4}$

Alternativ framgangsmåte dersom vi allerede hadde lært Stokes sats:

$\nabla \times \mathbf{u} = 2xy\mathbf{k}$. Vi integrerer over trekanten først ved $0 \leq x \leq y$ og deretter $0 \leq y \leq 1$. Siden vi går rundt mot klokka er normalvektor $\mathbf{n} = \mathbf{k}$.
 $\int_{\text{Trekant}} \nabla \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_0^1 \int_0^y 2xy dx dy = \int_0^1 y^3 dy = \frac{1}{4}$

Antall riktige svar $55/87 = 63.22\%$

Oppave 9

En spiral er parametrisert ved $\mathbf{r}(\theta) = \theta \sin \theta \mathbf{i} + \theta \cos \theta \mathbf{j} + \frac{2}{3}\sqrt{2}\theta^{\frac{3}{2}}\mathbf{k}$ der $0 \leq \theta \leq 1$. Hva er buelengden til spiralen?

Regn ut $\frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = (\sin \theta + \theta \cos \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta - \theta \sin \theta)\mathbf{j} + \sqrt{2}\theta\mathbf{k}$, og $|d\mathbf{r}| = (1 + \theta) d\theta$, og $\int_{\text{Spiral}} |d\mathbf{r}| = \int_0^1 (1 + \theta) d\theta = \frac{3}{2}$

Antall riktige svar $61/87 = 70.11\%$

Oppave 10

Gitt et strømningsfelt med hastighetsvektor $\mathbf{u} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, og den lukkede flaten A til et rettvinklet prisme (det burde ha stått parallelepiped) med sider $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$, $z = 3$. Hva er den integrerte volumstrømmen (fluksen) av $\mathbf{u}$ gjennom flaten A ?

$A_1 (x = 0): \mathbf{n} = -\mathbf{i}$, og $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -y$ og $\int_{A_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_0^3 \int_0^2 -y dy dz = -6$

$A_2 (x = 1): \mathbf{n} = \mathbf{i}$, og $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = y$ og $\int_{A_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_0^3 \int_0^2 y dy dz = 6$

$A_3 (y = 0): \mathbf{n} = -\mathbf{j}$, og $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -x$ og $\int_{A_3} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_0^3 \int_0^1 -x dx dz = -\frac{3}{2}$

$A_4 (y = 2): \mathbf{n} = \mathbf{j}$, og $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = x$ og $\int_{A_4} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_0^3 \int_0^1 x dx dz = \frac{3}{2}$

$A_5 (z = 0): \mathbf{n} = -\mathbf{k}$, og $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, og $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ og $\int_{A_5} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0$

$A_6 (z = 3): \mathbf{n} = \mathbf{k}$, og $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 3$ og $\int_{A_6} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_0^2 \int_0^1 3 dx dy = 6$

Svar 6

Alternativ framgangsmåte dersom vi allerede hadde lært Gauss sats:

$\nabla \cdot \mathbf{u} = 1$. Vi integrerer over legemet $\int \nabla \cdot \mathbf{u} d\sigma = \int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 1 dx dy dz = 6$

Antall riktige svar $61/87 = 70.11\%$

Oppave 11

Hvilket av følgende alternativer beskriver strømlinjer til vektorfeltet $\mathbf{u} = 2y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$?

Finn strømlinjer ved $\mathbf{u} \times d\mathbf{r} = -ix dz - j2y dz + k(2y dy + x dx) = \mathbf{0}$ som har løsning $z = \text{konstant}$ og $y^2 + \frac{1}{2}x^2 = \text{konstant}$ som er ellipser (ikke sirkler).

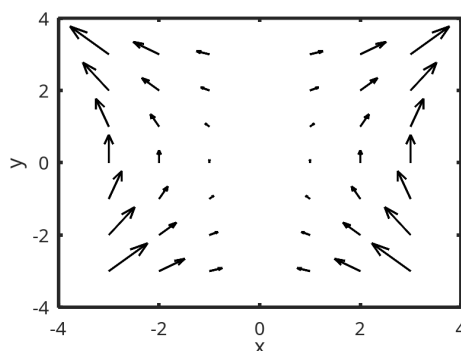
Alternativ framgangsmåte dersom vi allerede hadde lært om strømfunksjon:

Først sjekk at divergensen er null, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, og at feltet er 2D. I så fall vet vi at det eksisterer en strømfunksjon ψ gitt ved $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2y$ og $\frac{\partial \psi}{\partial x} = x$ som gir $\psi = y^2 + \frac{1}{2}x^2$. Samme svar.

Antall riktige svar $57/87 = 65.52\%$

Oppave 12

Hvilket vektorfelt svarer pilplottet til?

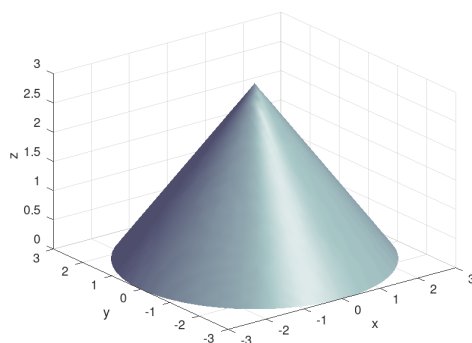


Hint for å identifisere riktig svaralternativ: Alle punkter med $x = 0$ ser ut til å være stagnasjonspunkter, og feltet har ikke negativ y -komponent noe sted. Da er det kun ett alternativ igjen, nemlig $\mathbf{u} = xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$.

Antall riktige svar $72/87 = 82.76\%$

Oppave 13

En flate A er gitt ved $z = 3 - r$ for $z \leq 0$, hvor $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Flaten er illustrert under. Hva er flateelementet $\mathbf{n} d\sigma$ til A når $\mathbf{n}$ peker i positiv z -retning?

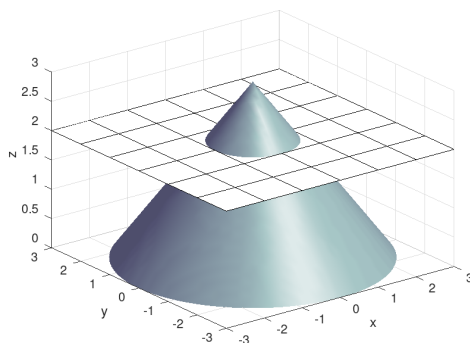


Svaralternativene tyder på at det passer å parametrisere flaten med (x, y) . Derfor $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (3 - r)\mathbf{k}$, og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{i} - \frac{x}{r}\mathbf{k}$ og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{j} - \frac{y}{r}\mathbf{k}$, og $\mathbf{n} d\sigma = \pm \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} dx dy = \pm (\frac{x}{r}\mathbf{i} + \frac{y}{r}\mathbf{j} + \mathbf{k}) dx dy$. Velg pluss.

Antall riktige svar $57/87 = 65.52\%$

Oppgave 14

Vi betrakter flaten S gitt ved $z = 3 - r$ begrenset til $0 \leq z \leq 2$. Hva blir den integrerte fluksen av vektorfeltet $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \mathbf{k}$ gjennom flaten S ? La normalvektoren til S peke ut av flaten og oppover langs z -aksen.



Oppgaveteksten burde ha spesifisert at $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, likt med forrige oppgave, men dette burde være ganske opplagt siden det er samme flate som vises i begge oppgavene.

For $0 \leq z \leq 2$ har vi $1 \leq r \leq 3$.

Dersom vi bruker parametriseringen fra forrige oppgave har vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = (r + 1) dx dy$. Nå lønner det seg imidlertid å gå over til polare koordinater $x = r \cos \theta$ og $y = r \sin \theta$, med Jacobi-determinant $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$. Integralet blir $\int_0^{2\pi} \int_1^3 (r + 1)r dr d\theta = \frac{76}{3}\pi$

Alternativt kan man bruke parametriseringen $\mathbf{r}(z, \theta) = (3 - z) \cos \theta \mathbf{i} + (3 - z) \sin \theta \mathbf{j} + z\mathbf{k}$, og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = -\cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j} + \mathbf{k}$ og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -(3 - z) \sin \theta \mathbf{i} + (3 - z) \cos \theta \mathbf{j}$, og $\mathbf{n} d\sigma = \pm \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} dz d\theta = \pm ((3 - z) \cos \theta \mathbf{i} + (3 - z) \sin \theta \mathbf{j} + (3 - z)\mathbf{k}) dz d\theta$. Velg pluss.

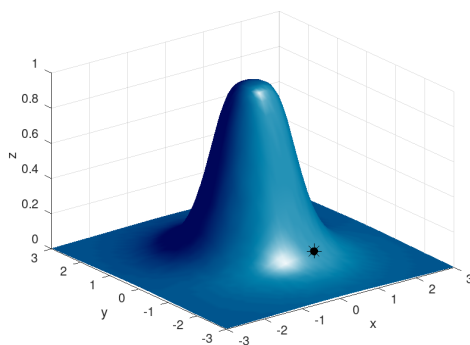
$\mathbf{v} = (3 - z) \cos \theta \mathbf{i} + (3 - z) \sin \theta \mathbf{j} + \mathbf{k}$, og $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = ((3 - z)^2 + (3 - z)) dz d\theta$, og $\int_0^{2\pi} \int_0^2 ((3 - z)^2 + (3 - z)) dz d\theta = \frac{76}{3}\pi$

Dessverre var ingen av de oppgitte svaralternativene riktige. Dette er faglærer sin største og mest utilgivelige slurvefeil noensinne. For å kompensere fikk alle godkjent "riktig" svar på denne oppgaven.

Antall riktige svar $87/87 = 100\%$

Oppave 15

En funksjon $f(x, y) = \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}$ er illustrert som høyden z i figuren under. Figuren viser derfor en ekviskalarflate til skalarfeltet $\beta(x, y, z) = f(x, y) - z$. Vi har markert inn et punkt P i flaten ved $(x, y, z) = (0, -1, f(0, -1))$. Hva er den retningsderiverte av $\beta(x, y, z)$ i punktet P i den retningen som peker direkte inn mot z -aksen?



Regn ut $\nabla\beta = -\frac{4r^2}{(1+r^4)^2}\mathbf{r} - \mathbf{k}$. For $x = 0$ og $y = -1$ er $\mathbf{r} = -\mathbf{j}$ og derfor $\nabla\beta = \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Enhets retningsvektor fra punktet P direkte inn mot z -aksen er $\mathbf{n} = \mathbf{j}$. Den retningsderiverte er $\mathbf{n} \cdot \nabla\beta|_P = 1$

Antall riktige svar $44/87 = 50.57\%$

Til slutt tar vi med litt karakterstatistikk for de 87 kandidatene som leverte besvarelser på midtveiseksamen vår 2026:

