LØSNINGSFORSLAG ME110 EKSAMEN JUNI 2003

av Bjørn Gjevik

Oppgave 1

a) Ekviskalarlinjer gitt ved:

$$\beta = A \ln (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = \beta_0 = \text{konstant}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{A}{2} \ln (x^2+y^2) = \beta_0$$

$$\ln (x^2+y^2) = \frac{2\beta_0}{A}$$

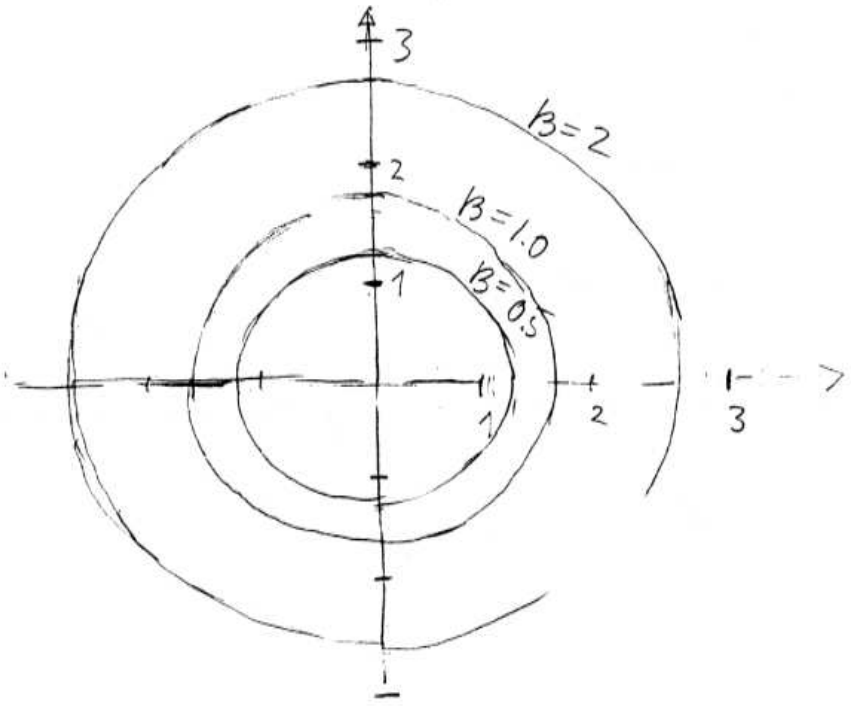
$$e^{\ln (x^2+y^2)} = e^{\frac{2\beta_0}{A}}$$

$$\underline{\underline{x^2+y^2 = e^{\frac{2\beta_0}{A}} = R^2}}$$ sirkel med radius $R = e^{\frac{\beta_0}{A}}$

$A = 2$, $\beta_0 = \frac{1}{2}$ $\quad R \simeq 1.3$

$\beta_0 = 1$ $\quad R \simeq 1.6$

$\beta_0 = 2$ $\quad R = 2.7$



Oppgave 1, fortsatt

b) Gradientvektoren gitt ved

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\,\bar{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\,\bar{j}$$

Nå er $\beta = \frac{A}{2}\ln(x^2+y^2)$ og

$$\frac{\partial\beta}{\partial x} = \frac{A}{2}\,\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{Ax}{x^2+y^2}$$

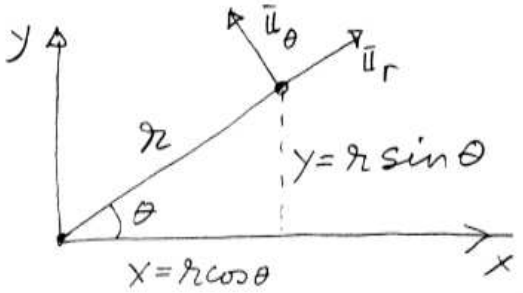
$$\frac{\partial\beta}{\partial y} = \frac{A}{2}\,\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{Ay}{x^2+y^2}$$

Innsatt

$$\nabla\beta = \frac{A}{x^2+y^2}\,(x\,\bar{i} + y\,\bar{j}) = \frac{A\,\bar{r}}{r^2}$$

hvor $\bar{r} = x\,\bar{i} + y\,\bar{j}$ og $r = |\bar{r}|$

c) Polarkoordinater r, θ



$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\beta = A\ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = A\ln r$$

Gradientvektoren i polarkoordinater

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial r}\,\bar{i}_r + \frac{\partial\beta}{r\,\partial\theta}\,\bar{i}_\theta = \frac{A}{r}\,\bar{i}_r$$

Oppgave 1 forts.

d)

$$\mathbb{V} = -\nabla \times (\beta \mathbb{k}) = -\begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\partial \beta}{\partial y}\mathbb{i} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\mathbb{j}$$

$$\nabla\beta \cdot \mathbb{V} = \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\mathbb{i} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\mathbb{j}\right)\left(-\frac{\partial \beta}{\partial y}\mathbb{i} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\mathbb{j}\right)$$

$$= -\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{\partial \beta}{\partial x} = 0$$

Altså vektorene $\nabla\beta$ og $\mathbb{V}$ står normalt på hverandre.

$$\nabla \cdot \mathbb{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \beta}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)$$

$$= -\frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y \partial x} = 0$$

Oppgave 2

a) For felt $\mathbb{V}_1$:

$$\nabla \cdot \mathbb{V}_1 = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(-y) = 1 - 1 = 0$$

$$\nabla \times \mathbb{V}_1 = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ x & -y & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y) - \frac{\partial}{\partial y}(x)\right]\mathbb{k} = 0$$

Oppgave 2, fortsatt

For felt $\mathbb{V}_2$:

$$\nabla \cdot \mathbb{V}_2 = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\tfrac{1}{2}x^2\right) = \underline{\underline{y}} \neq 0$$

når $y \neq 0$

$$\nabla \times \mathbb{V}_2 = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ xy & \frac{1}{2}x^2 & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{1}{2}x^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}(xy)\right]\mathbb{k}$$

$$= (x - x)\,\mathbb{k} = \underline{\underline{0}}$$

b) Siden feltet $\mathbb{V}_1$ er virvelfritt og divergensfritt (og to-dimensjonalt) eksisterer det et hastighetspotensiale Φ og en strømfunksjon Ψ.

Siden feltet $\mathbb{V}_2$ er virvelfritt, men ikke divergensfritt eksisterer det bare et hastighetspotensiale Φ. for dette feltet

For felt 1)

Finner Φ:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = x \Rightarrow \Phi = \tfrac{1}{2}x^2 + f_1(y)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -y \Rightarrow \Phi = -\tfrac{1}{2}y^2 + f_2(x)$$

Entydig Φ dersom vi velger $f_1 = -\frac{1}{2}y^2$ og $f_2 = \frac{1}{2}x^2$:

$$\underline{\underline{\Phi = \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2)}}$$

Oppgave 2, forts.

Finner Ψ:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -x \Rightarrow \Psi = -xy + f_1(x)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -y \Rightarrow \Psi = -xy + f_2(y)$$

Velger $f_1 = f_2 = 0$, $\underline{\Psi = -xy}$

For felt 2)

Finner φ: $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = xy \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2}x^2 y + f_1(y)$

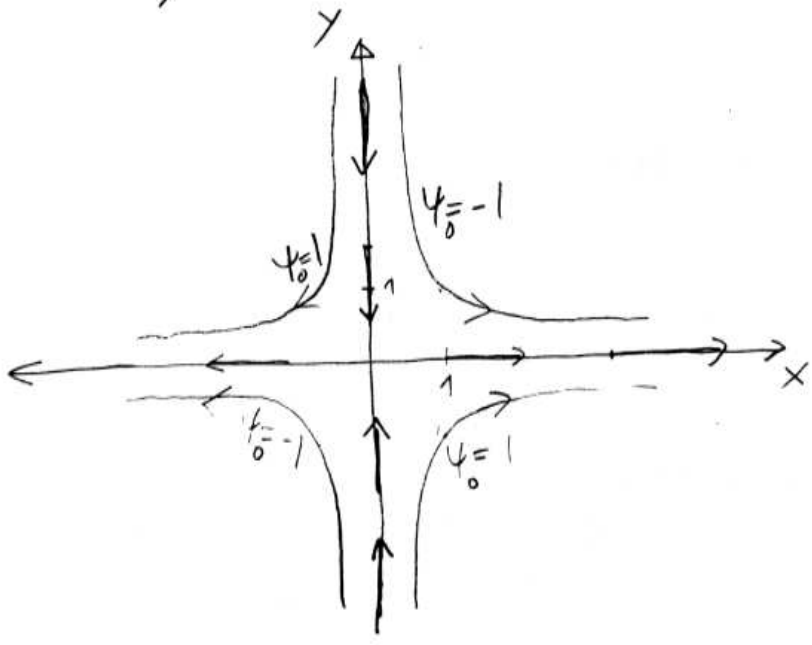
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2}x^2 y + f_2(x)$$

Velger $f_1 = f_2 = 0$ og får $\underline{\varphi = \frac{1}{2}x^2 y}$

c) $V_1 = x\,\vec{i} - y\,\vec{j}$

På x-aksen $y = 0$, $V_1 = x\,\vec{i}$

På y-aksen $x = 0$ $V_1 = -y\,\vec{j}$



Strømlinjene gitt ved

$\Psi = -xy = \Psi_0$

$y = -\frac{\Psi_0}{x}$

Oppgave 2, fortsatt

d) Likningen for strømlinjen

$$u\,dy = v\,dx \qquad \text{hvor } \mathbb{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$$

Innsatt $u = xy$ og $v = \frac{1}{2}x^2$

$$xy\,dy = \tfrac{1}{2}x^2\,dx$$

$$y\,dy = \tfrac{1}{2}x\,dx$$

Integrere

$$\int y\,dy = \int \tfrac{1}{2}x\,dx$$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = \tfrac{1}{4}x^2 + C$$

$$y^2 = \tfrac{1}{2}x^2 + 2C$$

$$\underline{\underline{y = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}x^2 + 2C}}}$$

Oppgave 3

a) Gauss sats (divergensteoremet) for et vektorfelt $\mathbb{A}$ kan skrives

$$\int_T \nabla\cdot\mathbb{A}\,d\tau = \int_\sigma \mathbb{A}\cdot n\,d\sigma$$



Volumintegralet av divergensen $\nabla\cdot\mathbb{A}$ over volumet T er lik flateintegralet av normalkomponenten av vektoren $\mathbb{A}\cdot n$ over flaten σ. (vektorfluksen)

Oppgave 3, fortsatt



$d\tau$ er volumelementet
$d\sigma$ er flateelementet
$\vec{n}$ er normalvektoren i flateelementet $d\sigma$

b) Oppgitt: $\vec{A} = A_r \vec{\pi}_r$, $\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 A_r)$

Setter $A_r = \frac{1}{3} C r$ det gir

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{3} C r^3\right) = \frac{1}{r^2}\frac{C}{3} \cdot 3 r^2 = \underline{C}$$

Fra Gauss satt

$$Q = \int_\sigma \vec{A} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \int_\tau \nabla \cdot \vec{A}\, d\tau = C \int_\tau d\tau = \underline{\underline{C\tau}}$$

hvor $\tau = \frac{4}{3}\pi a^3$ er volumet av kula.

Beregner vektorfluksen direkte

$$Q = \int_\sigma \vec{A} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \int_\sigma A_r \vec{\pi}_r \cdot \vec{\pi}_r\, d\sigma = \int_\sigma A_r\, d\sigma = \frac{C}{3} a \int_\sigma d\sigma$$

$$= \underline{\underline{\frac{Ca\sigma}{3}}}$$

hvor $\sigma = 4\pi a^2$ er overflaten av kula.

Med formlene for volum og overflate av en kule ser vi at de to måtene å beregne vektorfluksen på gir samme svar.

Oppgave 3, fortsatt

c) Med $A_r = \frac{C}{r^2}$ blir $\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 A_r) =$

$= \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(C) = 0$

Vektorfluksen beregnet med Gauss sats

$$Q = \int_\sigma \vec{A} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \int_\tau \nabla \cdot \vec{A}\, d\tau = \underline{\underline{0}}$$

Vektorfluksen beregnet direkte.

$$Q = \int_\sigma \vec{A} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \int_\sigma A_r \vec{n}_r \cdot \vec{n}_r\, d\sigma = \int_\sigma \frac{C}{a^2}\, d\sigma$$

$$= \frac{C}{a^2}\sigma = \frac{C}{a^2} 4\pi a^2$$

$$= \underline{\underline{4\pi C}}$$

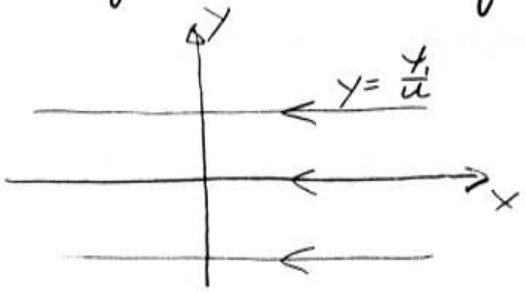
Forskjellig svar fordi i origo $r \to 0$ $A_r \to \infty$ slik at det er singulært punkt (kilde) i dette punktet hvor Gauss sats ikke gjelder

Oppgave 4

a) Potensialfelter er divergens og virvelfrie $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ og $\nabla \times \vec{v} = 0$.

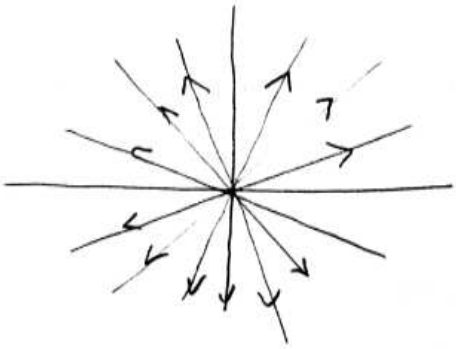
Oppgave 4, forts. alt

b) Feltet $\Psi_1 = Uy$ er feltet for rettlinjet strøm i negativ x-retning $u = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} = -U$.



Feltet $\Psi_2 = -aU\theta$ har strømlinjer

$\Psi = -aU\theta = \Psi_0 = \text{konst.}$ $\theta = -\frac{\Psi_0}{aU}$



Strømkomponenter

$v_r = -\frac{\partial \Psi_2}{r\partial\theta} = \frac{aU}{r}$

$v_\theta = 0$

Kilde i origo

c) Gitt to potensialfelt W_1 og W_2

$\nabla \cdot W_1 = 0$, $\nabla \times W_1 = 0$

$\nabla \cdot W_2 = 0$, $\nabla \times W_2 = 0$

Superponerer de to feltene $W = W_1 + W_2$

Da er:

$\nabla \cdot W = \nabla \cdot (W_1 + W_2) = \nabla \cdot W_1 + \nabla \cdot W_2 = 0$

$\nabla \times W = \nabla \times (W_1 + W_2) = \nabla \times W_1 + \nabla \times W_2 = 0$

Altså feltet W oppfyller kravene til å være et potensialfelt

Oppgave 4, fortsatt

d) Strømfunksjonen

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = Uy - aU\theta = U(r\sin\theta - a\theta)$$

hvor det er innført polarkoordinater $y = r\sin\theta$.

Strømlinjene gitt ved

$$\psi = U(r\sin\theta - a\theta) = \psi_0 = \text{konst}$$

Derav:

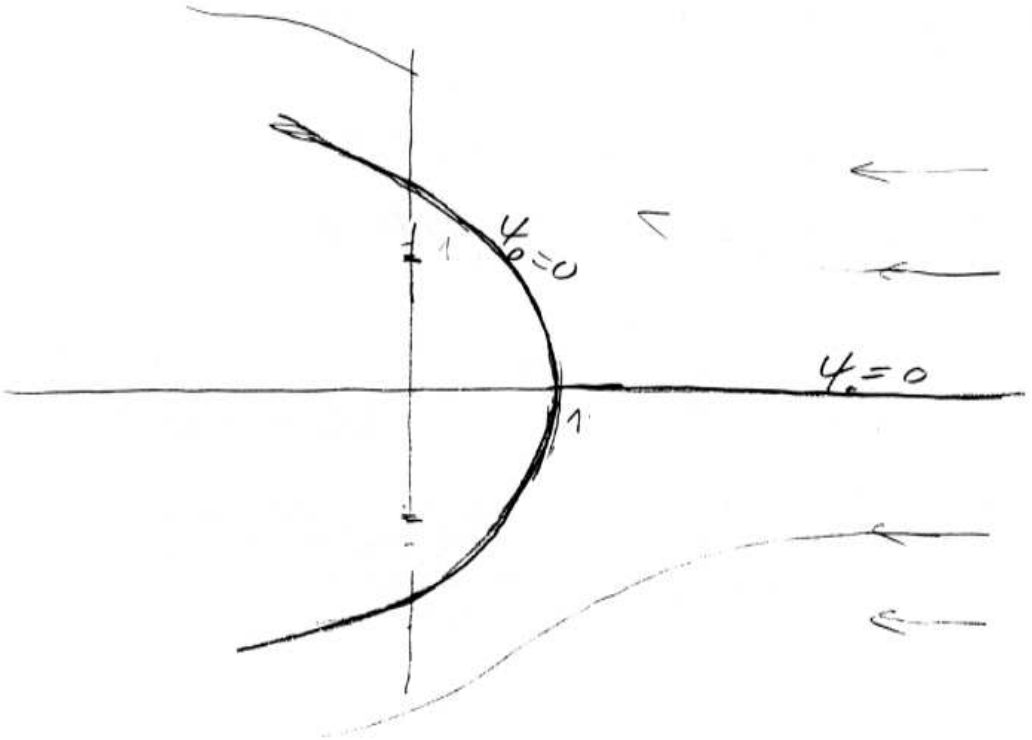
$$\frac{r}{a}\sin\theta - \theta = \frac{\psi_0}{Ua}$$

Strømlinjen $\psi_0 = 0$ er gitt ved

1) $\theta = 0$

2) $\frac{r}{a} = \frac{\theta}{\sin\theta}$

θ	$\frac{r}{a}$
→ 0	1
$\pm\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$
$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{\pi}{2}$



Oppgave 4, fortsatt

Hastighetskomponenten gitt ved

$$V_r = -\frac{\partial \Psi}{r \partial \theta} = -\frac{1}{r}\left[r\cos\theta - a\right]$$

$$V_\theta = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = U\sin\theta$$

Innsatt $\theta = 0$ og $r = a$

$V_r = V_\theta = 0$. Punktet er et stagnasjonspunkt.