LØSNINGFORSLAG MEK 1100 EKSAMEN JUNI 2004

av Bjørn Gjevik

Oppgave 1

a) Strømvektoren $\mathbb{V} = \nabla\Phi$ er virvelfri fordi $\nabla \times \mathbb{V} = \nabla \times \nabla\Phi \equiv 0$. Strømkomponentene $\mathbb{V} = [V_r, V_\theta]$ gitt ved $\mathbb{V} = \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\mathbb{i}_r + \frac{\partial\Phi}{r\partial\theta}\mathbb{i}_\theta$

Altså: $V_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r}$, $V_\theta = \frac{\partial\Phi}{r\partial\theta}$

b) Relasjonene $V_r = -\frac{\partial\Psi}{r\partial\theta}$, $V_\theta = \frac{\partial\Psi}{\partial r}$ sikrer at

$$\nabla \cdot \mathbb{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-r\frac{\partial\Psi}{r\partial\theta}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\left(-\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial\theta} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta\partial r}\right) = 0$$ fordi rekkefølgen i partiellderivasjonene kan byttes om.

c) Ekviskalarlinjene for Φ og Ψ er ortogonale dersom vektorene $\nabla\Phi$ og $\nabla\Psi$ står normalt på hverandre. Da må:



$$\nabla\Phi \cdot \nabla\Psi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\mathbb{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\mathbb{i}_\theta\right) \cdot \left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\mathbb{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\mathbb{i}_\theta\right)$$

$$= \frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}$$

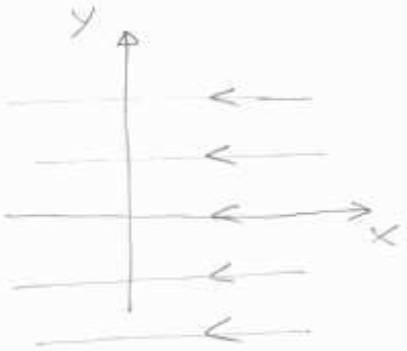
$$= V_r V_\theta + V_\theta(-V_r)$$

$$= 0$$

Altså er $\nabla\Phi$ og $\nabla\Psi$ vektorer som står normalt på hverandre. Følgelig er ekviskalarlinjene for Φ og Ψ ortogonale.

Oppgave 2

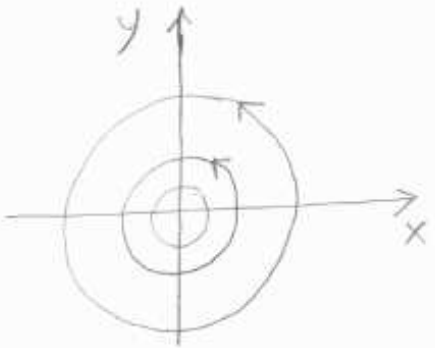
a) $\Psi_1 = Uy$ rettlinjet strøm (uniformt felt)



Strømlinjer:

$$\Psi_1 = \Psi_0 = \text{konst}$$
$$\Downarrow$$
$$y = \frac{\Psi_0}{U_0}$$

$\Psi_2 = aU \ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ punktvirvel med sentrum i origo.



Strømlinjer:

$$\Psi_2 = \Psi_0 = \text{konst}$$
$$\Downarrow$$
$$\ln(x^2+y^2) = \frac{2\Psi_0}{aU}$$

b) De to strømfunksjonene Ψ_1 og Ψ_2 har henholdsvis strømvektorer $\mathbb{V}_1$ og $\mathbb{V}_2$ som er divergens og virvelfrie (potensialfelt). Derfor er

$$\nabla \cdot \mathbb{V}_1 = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \mathbb{V}_2 = 0$$
$$\nabla \times \mathbb{V}_1 = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbb{V}_2 = 0$$

Feltet $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$ med strømfunksjon $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ er også divergens- og virvelfritt fordi

$$\nabla \cdot \mathbb{V} = \nabla \cdot (\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) = \nabla \cdot \mathbb{V}_1 + \nabla \cdot \mathbb{V}_2 = 0$$
$$\nabla \times \mathbb{V} = \nabla \times (\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) = \nabla \times \mathbb{V}_1 + \nabla \times \mathbb{V}_2 = 0$$

Oppgave 2 (fortsatt)

b) Altså er feltet med strømfunksjon ψ også et potensialfelt. Potensialfelter kan superponeres (adderes)

c) Polarkoordinater (r, θ)



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

Deraw

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Innsatt i uttrykket for strømfunksjonen:

$$\psi = Uy + aU\ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = U\left[r\sin\theta + aU\ln r\right]$$

Strømkomponentene er gitt ved:

$$V_r = -\frac{\partial\psi}{r\partial\theta} = -U\cos\theta$$

$$V_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial r} = U\sin\theta + \frac{aU}{r} = U\left[\sin\theta + \frac{a}{r}\right]$$

Sirkulasjonen om en sirkel med radius $r = a$ og sentrum i origo:



Buelementet er

$$dr = a\,d\theta\,\mathbb{I}_\theta$$

Oppgave 2 (fortsatt)

c) Sirkulasjonen er:

$$C = \oint_\lambda \mathbb{V} \cdot d\mathbb{r} = \oint_\lambda (V_r \bar{\imath}_r + V_\theta \bar{\imath}_\theta) \cdot a\,d\theta\, \bar{\imath}_\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} V_\theta a\, d\theta = \int_0^{2\pi} U(\sin\theta + 1) a\, d\theta$$

$$= aU \int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta + aU \int_0^{2\pi} d\theta = \underline{\underline{2\pi a U}}$$

($\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta = 0$)

Oppgave 3

Bernoullis likning:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\mathbb{V}^2 + gz = H_0$$

p = trykket i væska/gassen
ρ = tetthetan — i —
$\mathbb{V}$ = strømvektoren
g = tyngdeakselerasjonen
z = høyden over et referansenivå ($z=0$).
H_0 = Bernoulli-konstanten

Likningen sier at $\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\mathbb{V}^2 + gz$ er konstant langs en strømlinje. Likningen gjelder for stasjonær friksjonsfri strøm

b) Volumstrømmen gjennom tverrsnittet ved A per tidsenhet.

$$Q_A = \int_\sigma \vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \int_\sigma u_A \vec{i}\cdot\vec{i}\,d\sigma = \int_\sigma u_A\,d\sigma$$

$$= u_A \int_\sigma d\sigma = \underline{\underline{\pi R^2 u_A}}$$

c) Volumstrømmen gjennom tverrsnittet ved B er på tilsvarende måte

$$Q_B = \pi r^2 u_B$$

Siden væska er usammentrykkbar må $Q_A = Q_B$ dvs

$$\pi R^2 u_A = \pi r^2 u_B$$

Derav: $\underline{\underline{u_B = \left(\frac{R}{r}\right)^2 u_A}}$

d) Bruker Bernoullis likning langs en strømlinje fra tverrsnitt A til tverrsnitt B f. eks langs senterlinjen. Da er

$$\frac{p_A}{\rho} + \frac{1}{2}u_A^2 = \frac{p_B}{\rho} + \frac{1}{2}u_B^2 \qquad (z=0)$$

Derav

$$p_B = p_A - \frac{\rho}{2}(u_B^2 - u_A^2)$$

$$= \underline{\underline{p_A - \frac{\rho}{2}u_A^2\left[\left(\frac{R}{r}\right)^4 - 1\right]}}$$

Ser av denne formelen at trykket ved B er mindre enn trykket ved A. ($p_B < p_A$)