LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN MEK1100 HØST 2004

av Bjørn Gjevik

Oppgave 1

a) Definer potensialfunksjonen (hastighetspotensialet) ϕ ved $\mathbb{V} = \nabla\phi$ slik at hastighetskomponentene er

$$\underline{V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \text{ og } V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}}$$

Dette sikrer at feltet er virvelfritt fordi

$$\nabla \times \mathbb{V} = \nabla \times (\nabla\phi) \equiv 0$$

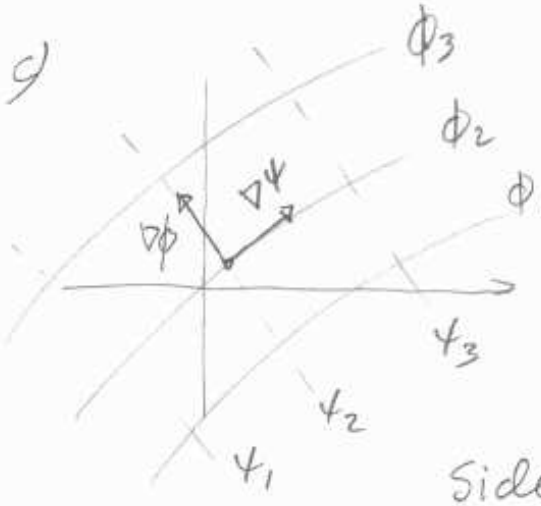
b) Feltfunksjonen (strømfunksjon) ψ er definert for et 2-D felt slik at

$$\underline{V_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}}$$

Da er divergensen til feltet

$$\nabla \cdot \mathbb{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0$$

c)



Vi vet at gradient-vektorene $\nabla\phi$ og $\nabla\psi$ står normalt henholdsvis på ekviskalarlinjene for ϕ og ψ.

Siden

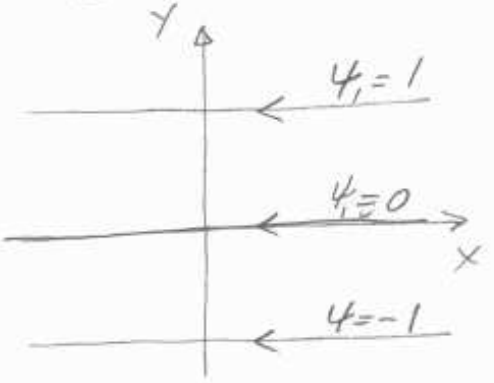
$$\nabla\phi \cdot \nabla\psi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$= V_x V_y + V_y(-V_x) = 0$$

Står altså ekviskalarlinjene for ϕ og ψ normalt (ortogonale) på hverandre.

Oppgave 2.

a) Feltet ψ_1 kalles uniformt felt



Strømlinjene er gitt ved

$$\psi_1 = Uy = \psi_0 = \text{konstant}$$

Altså

$$y = \frac{\psi_0}{U}$$

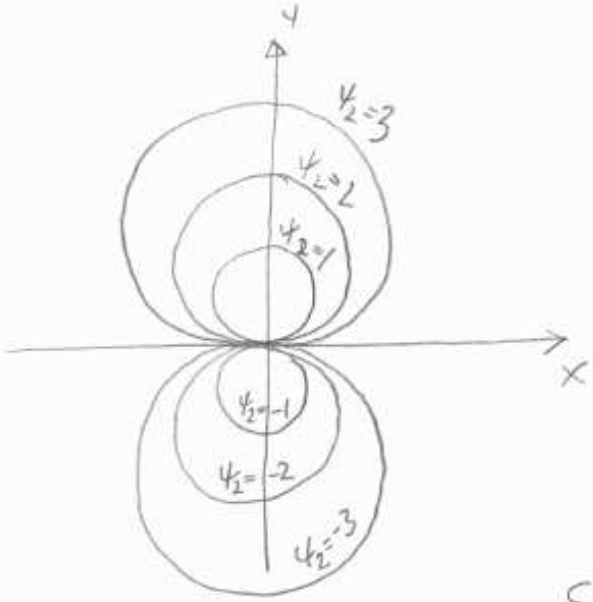
Strømkomponentene

$$v_x = -\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = -U$$

$$v_y = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0$$

Feltet representer en rettlinjet (konstant) strøm parallelt med x-aksen. Strømmen er rettet i negativ x-retning.

Feltet ψ_2 kalles dipolfeltet



Strømlinjene er gitt ved

$$\psi_1 = -\frac{Ua^2 y}{x^2 + y^2} = \psi_0 = \text{konst}$$

Ordner likningen og får:

$$x^2 + y^2 = -\frac{Ua^2}{\psi_0} y$$

$$x^2 + \left(y + \frac{Ua^2}{2\psi_0}\right)^2 = \frac{U^2 a^4}{4\psi_0^2}$$

Som altså er sirkler med sentrum på y-aksen i $\frac{Ua^2}{2\psi_0}$ og radius $\frac{Ua^2}{2\psi_0}$

Oppgv. 2 a) forts.

Dipolfeltet fremkommer ved superposisjon av en kilde og en sluk som ligger nær hverandre, avstand går mot null, i grensen.

b) Dersom en har to potensialfelt W_1 og W_2 slik at $\nabla \cdot W_1 = 0$, $\nabla \times W_1 = 0$ og $\nabla \cdot W_2 = 0$ $\nabla \times W_2 = 0$ så vil også feltet $W = W_1 + W_2$ være divergensfritt og virvelfritt

$$\nabla \cdot W = \nabla \cdot (W_1 + W_2) = \nabla \cdot W_1 + \nabla \cdot W_2 = 0$$

$$\nabla \times W = \nabla \times (W_1 + W_2) = \nabla \times W_1 + \nabla \times W_2 = 0$$

Følgelig er feltet $W = W_1 + W_2$ med strømfunksjon $\psi = \psi_1 + \psi_2$ et potensialfelt.

c) Strømlinjen $\psi = 0$ gitt ved

$$\psi = Uy - \frac{Ua^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

Altså

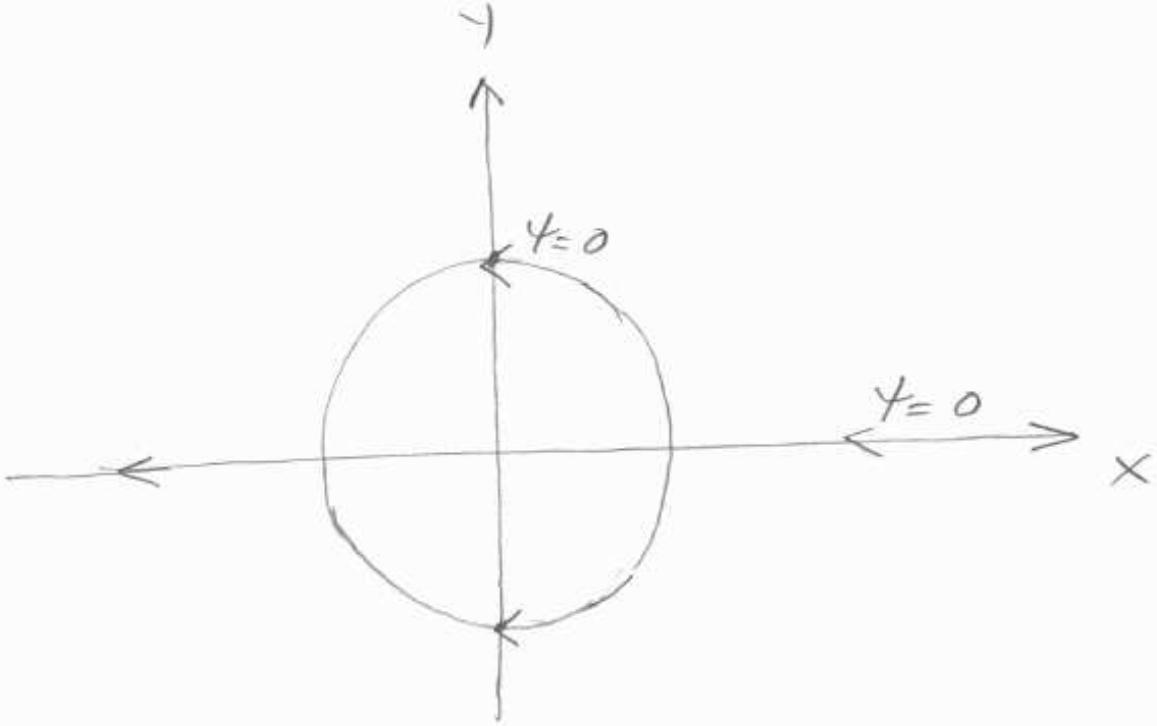
$$Uy\left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right) = 0$$

Dette er oppfylt for

1) $y = 0 \Rightarrow$ x-aksen

2) $1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$

Sirkel med sentrum i origo og radius a



Strømlinjen $\psi = 0$ med strømretning.

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -U + Ua^2\left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} = Ua^2 \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$$

På x-aksen $y = 0$ $\quad |x| \to \infty$

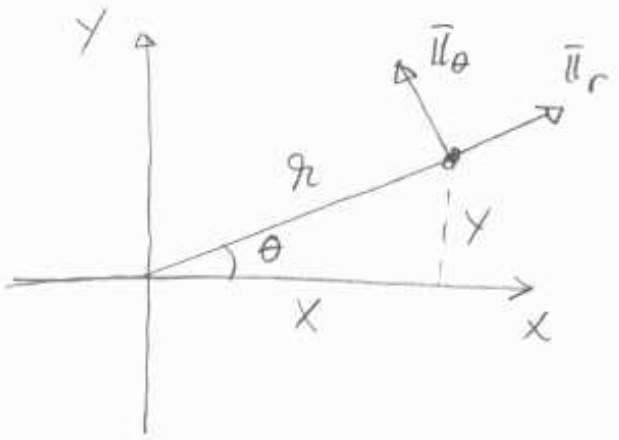
$$v_x = -U, \quad v_y = 0$$

På y-aksen $x = 0$, $y = \pm a$

$$v_x = -2U, \quad v_y = 0$$

Oppgave 2d

Innfører polarkoordinater (r, θ)



Enhetsvektorer $\bar{u}_r$, $\bar{u}_\theta$

Transformasjon til kartesisk

$$X = r\cos\theta$$

$$Y = r\sin\theta$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Strømfunksjonen i polarkoordinater

$$\psi = Uy - \frac{Ua^2 y}{x^2+y^2} = rU\sin\theta - \frac{Ua^2 r\sin\theta}{r^2}$$

$$= Ur\sin\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$

Komponentene for strømvektoren

$$v_r = -\frac{\partial\psi}{r\partial\theta} = -U\cos\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$v_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial r} = U\sin\theta\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$$

Oppgave 3

a) Varmestrømsvektoren

$$H = \rho C T v - k \nabla T$$

1) Leddet $\rho C T v$ representerer konvektiv varmetransport dvs transport med væskestrømmen

ρ = massetetthet kg/m^3

C = spesifik varmekapasitet $J/kg\,K$

T = temperatur K (kelvin)

v = strømvektor m/s

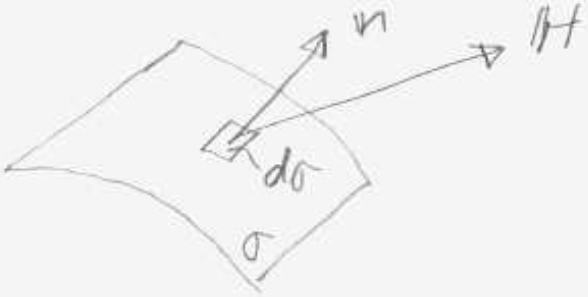
Enheten for den konvektive varmetransporten blir $\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{Joule}{kg\,K} \cdot K \cdot \frac{m}{s} = \frac{Joule}{m^2 s}$

2) Leddet $-k \nabla T$ er varmetransport ved molekylær ledning (Fouriers lov)

k = varmeledningstallet $\frac{Joule}{m\,K\,s}$

Oppgave 3, fortsatt

b)



Flate σ

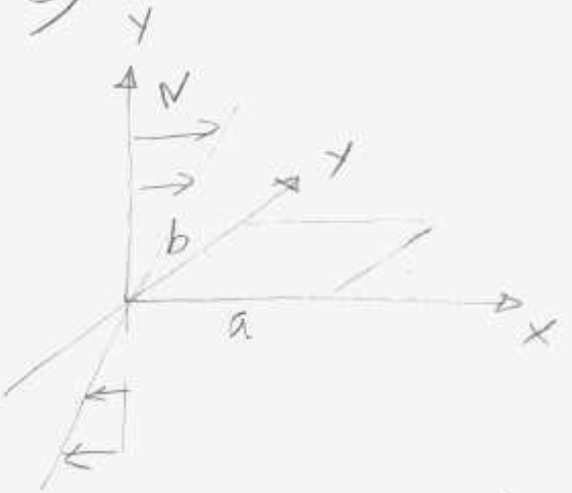
Flateelement $d\sigma$

Normalvektor til flateelementet $\mathbf{n}$

Total varmestrøm gjennom flaten σ

$$\int_\sigma \mathbf{H}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma$$

c)



Flate σ er rektangle i xy-planet med sidekanter a, b

Flatenormal $\mathbf{n} = \mathbf{k}$

Total varmestrøm gjennom flaten:

$$\int_\sigma \mathbf{H}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = \int_\sigma (\rho c T\mathbf{v} - k\nabla T)\cdot\mathbf{k}\, d\sigma$$

$$= \int_\sigma (\rho c T\mathbf{v}\cdot\mathbf{k} - k\nabla T\cdot\mathbf{k})\, d\sigma$$

$V_2 = 0$

$$= \int_\sigma (\rho c T v_2 - k\frac{\partial T}{\partial z})\, d\sigma$$

$$= -\int_\sigma k\frac{\partial T}{\partial z}\, d\sigma = kT_0\beta\int_\sigma d\sigma = \underline{kT_0\beta ab}$$