VÅR 2005

EKSAMEN MEK 1100 FELTTEORI OG VEKTORANALYSE

Løsningsforslag av Bjørn Gjevik

Oppgave 1

a) Feltet $\mathbb{V} = a(-x\,\mathbb{i} + y\,\mathbb{j})$ er virvelfritt

$$\nabla \times \mathbb{V} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -ax & ay & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(ay) - \frac{\partial}{\partial y}(-ax)\right]\mathbb{k} = 0$$

Følgelig eksisterer det en potensialfunksjon ϕ slik at $\mathbb{V} = \nabla\phi$ siden

$$\nabla \times \mathbb{V} = \nabla \times (\nabla\phi) \equiv 0.$$

Feltet er også divergensfritt:

$$\nabla \cdot \mathbb{V} = \frac{\partial}{\partial x}(-ax) + \frac{\partial}{\partial y}(ay) = -a + a = 0$$

Siden feltet også er to-dimensjonalt eksisterer det en feltfunksjon (strømfunksjon) ψ slik at

$$V_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}\,, \quad V_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Dette sikrer at feltet er divergensfritt

$$\nabla \cdot \mathbb{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

b) Potensialfunksjonen ϕ er gitt ved

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -ax\,, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = ay$$

Integrer disse likningene og får hhv.

$$\phi = -\tfrac{1}{2}ax^2 + f_1(y)\,, \quad \phi = \tfrac{1}{2}ay^2 + f_2(x)$$

Oppgv. 1 b forts.

For å få entydig uttrykk for ϕ velges $f_1(y) = \frac{1}{2}ay^2$ og $f_2(x) = -\frac{1}{2}ax^2$. Derved

$$\phi = \frac{a}{2}(y^2 - x^2)$$

Feltfunksjonen (strømfunksjonen) er gitt ved

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = ax \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = ay$$

Integrerer disse likningene og får hhv.

$$\psi = axy + f_1(x) \quad , \quad \psi = axy + f_2(y)$$

For å få entydig uttrykk for ψ velges $f_1(x) = f_2(y) = 0$. Derved

$$\psi = axy$$

c)



Vet at gradientvektorene $\nabla\phi$ og $\nabla\psi$ står normalt hhv. på ekviskalarlinjene for ϕ og ψ.

Ekviskalarlinjene for ϕ og ψ er ortogonale dersom

$$\nabla\phi \cdot \nabla\psi = 0$$

Dette kan skrives

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{j}\right) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\vec{j}\right) = 0$$

Oppgave 1 c fortsatt

Derav

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

Nå er $V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, $V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ og $V_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $V_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$

Innsatt

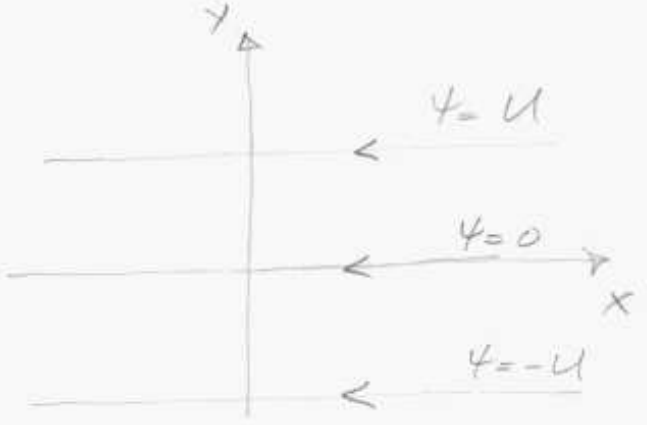
$$V_x V_y + V_y(-V_x) = 0$$

Som viser at ekviskalarlinjene står normalt på hverandre

Oppgave 2

a) Feltet $\psi_1 = Uy$ har strømlinjer

$\psi_1 = Uy = \psi_0 =$ konstant i.e. $y = \frac{\psi_0}{U}$



Strømkomponentene er

$$V_x = -\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = -U$$

$$V_y = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0$$

Feltet er et uniformt strømfelt med strømretning mot negativ x-akse

Oppgave 2 a forts.

Feltet $\psi_2 = -\frac{Ua^2y}{x^2+y^2}$ har strømlinjer

$\psi_2 = -\frac{Ua^2y}{x^2+y^2} = \psi_0 = \text{konstant}$. Dette kan skrives

$$x^2+y^2 = -\frac{U}{\psi_0}a^2y$$

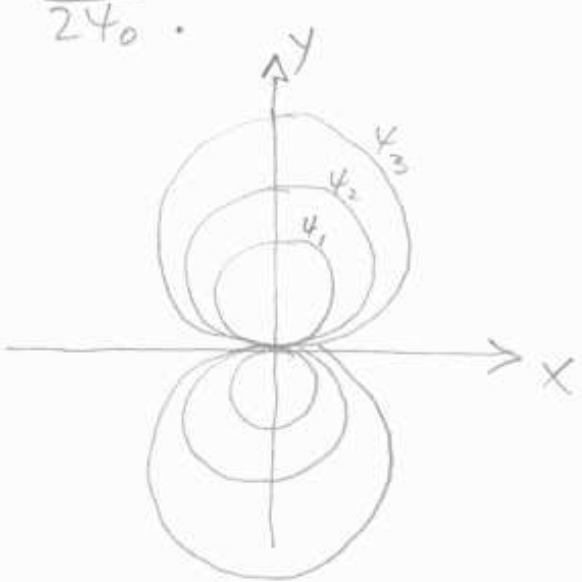
og

$$x^2+y^2+\frac{U}{\psi_0}a^2y+\frac{U^2a^4}{4\psi_0^2} = \frac{U^2a^4}{4\psi_0^2}$$

videre

$$x^2+\left(y+\frac{Ua^2}{2\psi_0}\right)^2 = \frac{U^2a^4}{4\psi_0^2}$$

Strømlinjene er altså sirkler med sentrum i $\left(x=0,\ y=-\frac{Ua^2}{2\psi_0}\right)$ og radius $\frac{Ua^2}{2\psi_0}$.



Dette er dipolfeltet med x-aksen som dipolakse

Oppgave 2 b)

Dersom to felt $\mathbb{V}_1$ og $\mathbb{V}_2$ er divergens og virvelfrie i.e

$$\nabla \cdot \mathbb{V}_1 = 0 \,, \quad \nabla \times \mathbb{V}_1 = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbb{V}_2 = 0 \,, \quad \nabla \times \mathbb{V}_2 = 0$$

Så er også summen av de to feltene (superposisjon)

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$$

divergens og virveltri

$$\nabla \cdot \mathbb{V} = \nabla \cdot (\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) = \nabla \cdot \mathbb{V}_1 + \nabla \cdot \mathbb{V}_2 = 0$$

$$\nabla \times \mathbb{V} = \nabla \times (\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) = \nabla \times \mathbb{V}_1 + \nabla \times \mathbb{V}_2 = 0$$

Derfor vil strømfunksjonen $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ være strømfunksjon for et potensialfelt

c) Strømlinjen $\Psi = 0$ er gitt ved

$$Uy - \frac{Ua^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

eller

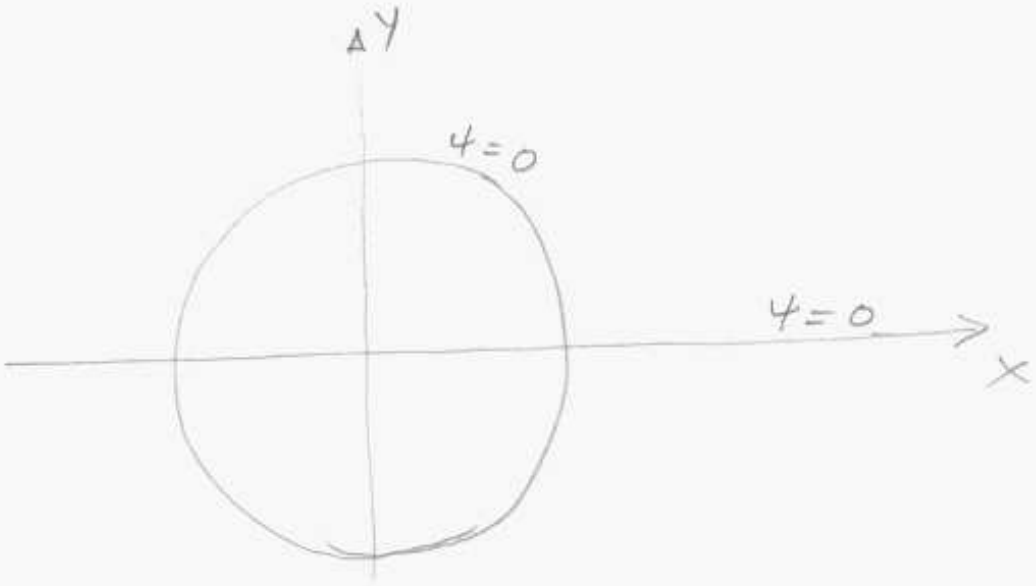
$$Uy\left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right) = 0$$

Dette uttrykket er null når

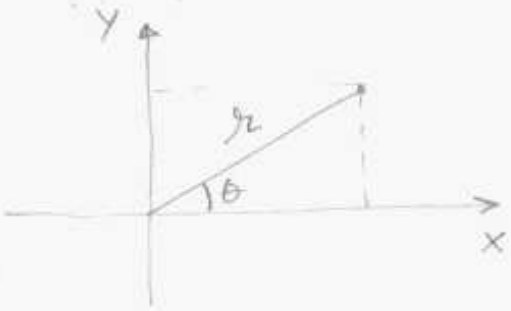
1) $y = 0 \Rightarrow$ x-aksen

2) $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow$ sirkel med radius a og sentrum i origo.

Oppgave 2 c fortsetter



d) Innfører polarkoordinater r, θ



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$r^2 = x^2 + y^2$$

Innsetning i uttrykket for ψ gir

$$\psi = Uy - \frac{Ua^2 y}{x^2+y^2} = Ur\sin\theta - \frac{Ua^2 r\sin\theta}{r^2}$$

$$= \underline{U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta}$$

Strømkomponentene i polarkoordinater er

$$v_r = -\frac{\partial\psi}{r\partial\theta}, \quad v_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial r}$$

Oppgave 2 d forts.

Derav finner vi

$$V_r = -\frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = -U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$V_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r} = U\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta$$

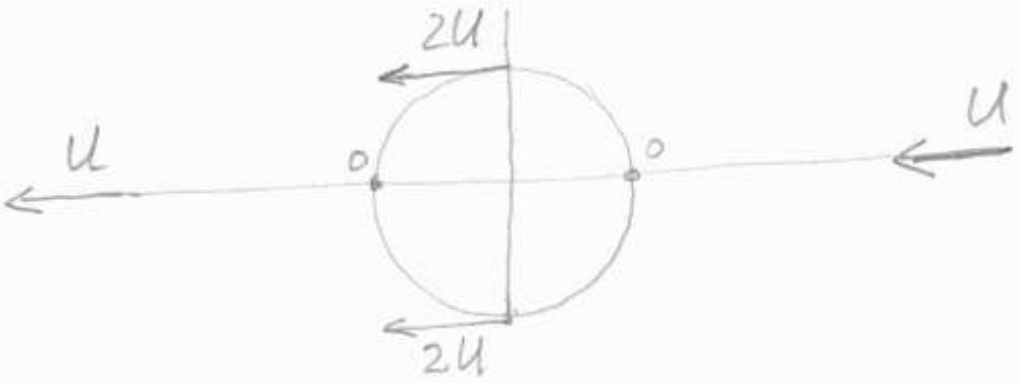
Langs strømlinjen $y=0$ (x-aksen) er $\theta=0$ og $\theta=\pi$. Altså $V_\theta = 0$

$V_r = -U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)$ for $\theta = 0$

$V_r = +U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)$ for $\theta = \pi$

Langs strømlinjen $x^2+y^2=a^2$ er $r=a$ og $V_r = 0$, $V_\theta = 2U\sin\theta$

Vi kan derfor lage følgende skisse



Feltet representerer uniform strøm omkring en sylinder

Oppgave 3

a) Varmestrømmen per flateenhet og tidsenhet er gitt ved vektoren

$$\mathbb{H} = \rho c T \mathbb{v} - k \nabla T$$

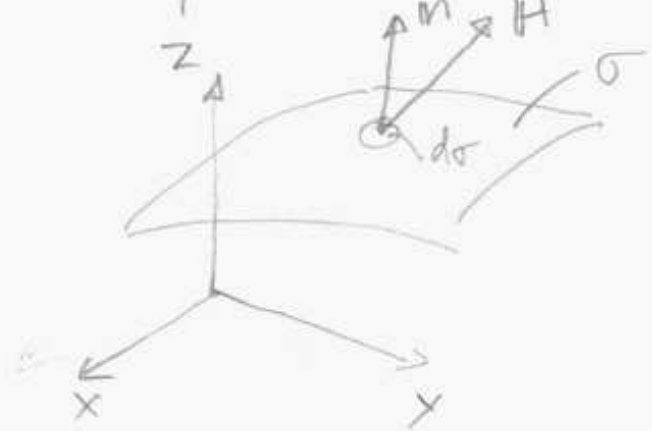
ρ	er massetettheten	kg/m^3
c	er spesifik varmekapasitet	Joule/kg K
T	er absolutt temperatur	K (Kelvin)
$\mathbb{v}$	er strømvektoren	m/s
k	er varmeledningstallet	Joule/msK

Leddet $\rho c T \mathbb{v}$ er varmetransport med fluidstrømmen (konvektiv varmetransport)

Leddet $-k \nabla T$ er varmeledning (Fouriers lov)

b) Varmefluksen gjennom en flate σ per tidsenhet er gitt ved flate-integralet

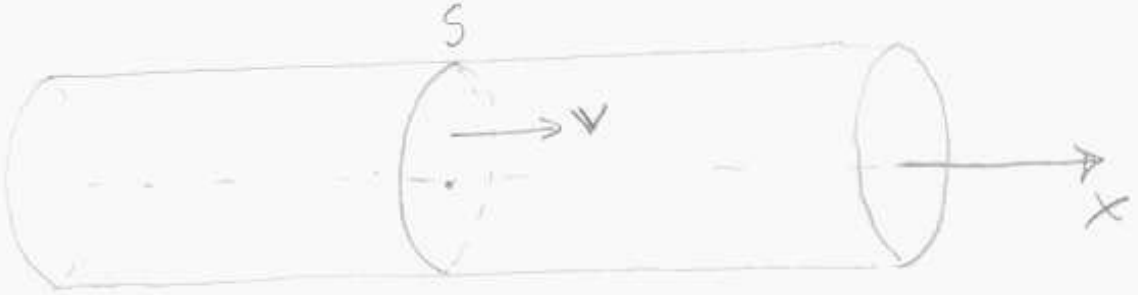
$$\int_\sigma \mathbb{H} \cdot \mathbb{n} \, d\sigma$$



hvor $\mathbb{n}$ er normalvektoren til flateelementet σ.

Oppgave 3 c

Strøm gjennom rør:



Varmestrømmen gjennom en tverrsnittsflate (S) normalt rørraksen (x-aksen)

Flaten S har normalvektor $n = i$

$$\int_S H \cdot n \, d\sigma = \int_S (\rho c T v - k \nabla T) \cdot i \, d\sigma$$

$$= \int_S \rho c T v \cdot i \, d\sigma - \int_S k \nabla T \cdot i \, d\sigma$$

$$= \int_S \rho c T v_x \, d\sigma - \int k \frac{\partial T}{\partial x} \, d\sigma$$

$$= \rho c T \int_S U \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] d\sigma + k T_0 \beta \int_S d\sigma$$

Siden ρ, c, k, T_0, β er konstante går disse utenfor integrasjon. $T(x)$ er også konstant over snittflate og kan settes utenfor integralet

Oppgave 3 c forts.

Arealet snittflaten er πa^2

Integralet $\int_S d\sigma = \pi a^2$

Integralet $\int_S U\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right] d\sigma = U\int_S \left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right] d\sigma$



Velger $d\sigma$ som en ring med radius r og bredde dr. På denne ringen er strømhastigheten den samme. Arealet av ringen er $d\sigma = 2\pi r\, dr$

Altså integralet:

$$\int_S \left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right] d\sigma = \int_0^a \left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right] 2\pi r\, dr$$

$$= 2\pi\left[\int_0^a r\, dr - \frac{2\pi}{a^2}\int_0^a r^3 dr\right]$$

$$= \pi a^2 - \frac{2\pi}{4a^2}a^4 = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}a^2}}$$

Følgelig blir varmestrømmen gjennom snittflaten

$$\int_S \vec{H}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}\varrho c T U a^2 + \pi k T_0 \beta a^2}}$$