Eksamen MEK1100 HØST 2005
LØSNINGSFORSLAG av Bjørn Gjevik

Oppgave 1

a) $\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2}(x^2 - y^2) = y - y = 0$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ V_x & V_y & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}(x^2 - y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy)\right]\vec{k}$$

$$= x - x = 0$$

Siden feltet er divergensfritt og 2-dimensjonalt eksisterer det en feltfunksjon (strømfunksjon) Ψ slik at $V_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ og $V_y = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$

Siden feltet er virvelfritt eksisterer det en potensialfunksjon Φ slik at $V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$

b) Finner først Φ.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = xy \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

Integrerer

$$\Phi = \frac{1}{2}x^2 y + f_1(y) \quad , \quad \Phi = \frac{1}{2}x^2 y - \frac{1}{6}y^3 + f_2(x)$$

For å få entydig Φ velges

$$f_1(y) = -\frac{1}{6}y^3 \quad , \quad f_2(x) = 0$$

Derved får vi: $\underline{\underline{\Phi = \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3}}$

Finner så Ψ:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -xy \quad , \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

Integrerer

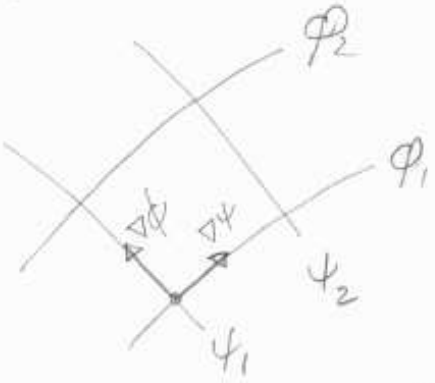
$$\Psi = -\frac{1}{2}xy^2 + g_1(x) \quad , \quad \Psi = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}xy^2 + g_2(y)$$

For å få entydig Ψ velges

$$g_1(x) = \frac{1}{6}x^3 \quad , \quad g_2(y) = 0$$

Derved får vi: $\underline{\underline{\Psi = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}xy^2}}$

c)



Generelt har vi at

$$\nabla\Phi \cdot \nabla\Psi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}i + \frac{\partial \Phi}{\partial y}j\right) \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}i + \frac{\partial \Psi}{\partial y}j\right)$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$= V_x V_y + V_y(-V_x) = \underline{\underline{0}}$$

Altså $\nabla\Phi$ og $\nabla\Psi$ står normalt på hverandre

Siden $\nabla\Phi$ og $\nabla\Psi$ står normalt henholdsvis på ekviskalarlinjene for Φ og Ψ må ekviskalarlinjene for Φ og Ψ stå normalt på hverandre.

Alternativ:
Beviset kan også gjennomføres med feltet i a)

$$\nabla\varphi = xy\,\vec{i} + \tfrac{1}{2}(x^2-y^2)\,\vec{j}$$

$$\nabla\psi = \tfrac{1}{2}(x^2-y^2)\,\vec{i} - xy\,\vec{j}$$

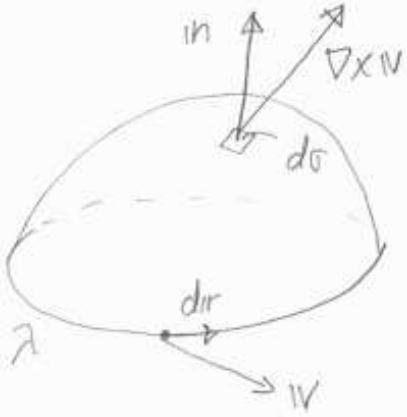
$$\nabla\varphi\cdot\nabla\psi = \left(xy\,\vec{i} + \tfrac{1}{2}(x^2-y^2)\,\vec{j}\right)\cdot\left[\tfrac{1}{2}(x^2-y^2)\,\vec{i} - xy\,\vec{j}\right]$$

$$= \frac{xy}{2}(x^2-y^2) - \frac{xy}{2}(x^2-y^2) = \underline{\underline{0}}$$

Oppgave 2

a) Stokes sats

$$\int_\sigma \nabla\times\mathbb{V}\cdot \mathrm{in}\, d\sigma = \oint_\lambda \mathbb{V}\cdot d\mathbb{r}$$



σ flate begrenset av kurve λ

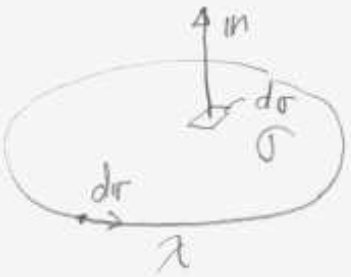
$d\sigma$ flateelement i σ

in normalvektoren til flateelementet

$d\mathbb{r}$ bueelement i kurven λ.

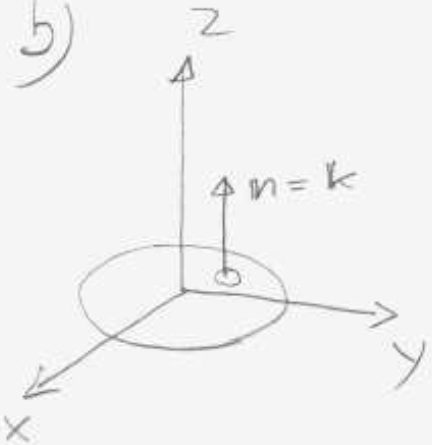
Satsen sier at sirkulasjonen av vektoren $\mathbb{V}$ omkring begrensningskurven λ er lik flateintegralet av normalkomponenten av virvlingen til $\mathbb{V}$ over flaten σ

Stokes sats gjelder også om σ og λ ligger i et og samme plan. Satsen kalles da ofte Greens sats



Stokes (Greens) sats i 2-D plan flate

b)



Sirkulasjonen av $\mathbf{V}$ omkring en sirkel i xy-planet:

Nå er

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 2 \end{vmatrix} = \underline{2\omega \mathbf{k}}$$

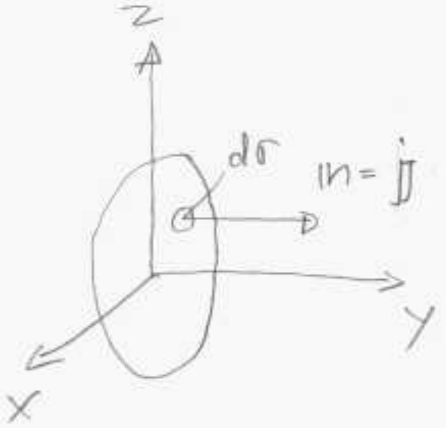
Sirkulasjonen:

$$C = \oint_\sigma \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_\sigma \nabla \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_\sigma 2\omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}\, d\sigma$$

$$= 2\omega \int_\sigma d\sigma = \underline{\underline{2\pi a^2 \omega}}$$

NB! Siden integranden er uavhengig av x og y blir resultatet det samme om sirkelen sentrum flyttes til et vilkårlig punkt i xy-planet

c) Sirkulasjonen av $\vec{W}$ omkring en sirkel i xz-planet



$$C = \int \vec{W} \cdot d\vec{r} = \int \nabla \times \vec{W} \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

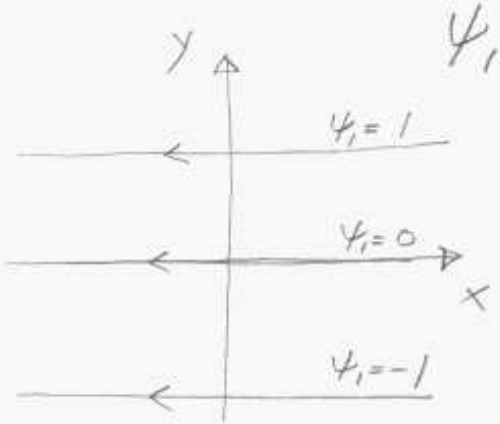
$$= \int_\sigma 2\omega \vec{k} \cdot \vec{j}\, d\sigma = \underline{0}$$

Resultatet er uavhengig av hvor sentrum av sirkelen ligger.

Oppgave 3

a) Feltet $\psi_1 = Uy$. Strømlinjer gitt ved:

$$\psi_1 = Uy = \psi_0 = \text{konst}$$



$y = \frac{\psi_0}{U}$ som er rette linjer parallell med x-aksen.

Strømkomponentene gitt ved:

$$V_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -U \quad , \quad V_y = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0$$

Feltet beskriver konstant rettlinjet strøm (uniformt felt)

Oppgave 3 fortsatt

Feltet $\psi_2 = -\frac{Ua^2 y}{x^2+y^2}$

Strømlinjene gitt ved:

$$\psi_2 = -\frac{Ua^2 y}{x^2+y^2} = \psi_0 = \text{konst}$$

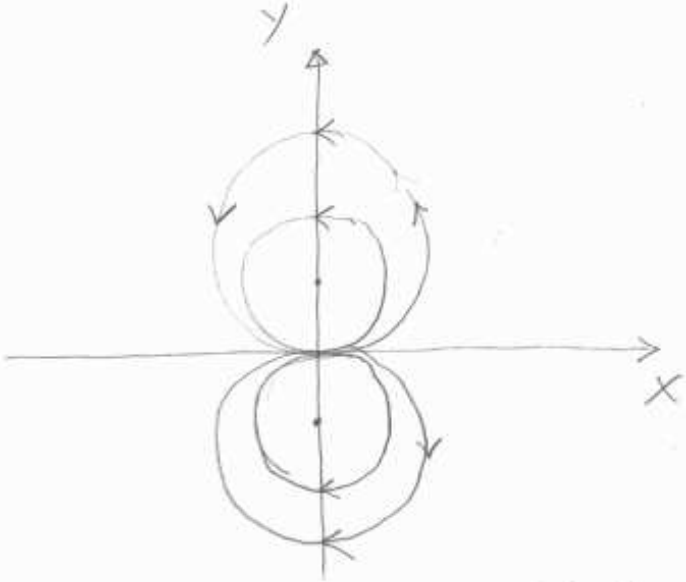
Deraw

$$x^2+y^2 = -\frac{Ua^2}{\psi_0} y$$

$$x^2 + y^2 + \frac{Ua^2}{\psi_0} y + \left(\frac{Ua^2}{2\psi_0}\right)^2 = \left(\frac{Ua^2}{2\psi_0}\right)^2$$

$$x^2 + \left(y + \frac{Ua^2}{2\psi_0}\right)^2 = \left(\frac{Ua^2}{2\psi_0}\right)^2$$

Sirkler med sentrum $x=0$, $y=-\frac{Ua^2}{2\psi_0}$
og radius $\frac{Ua^2}{2\psi_0}$



Feltet kalles dipolfeltet

Strømkomponenten:

$$v_x = -\frac{\partial \psi_2}{\partial y} = +\frac{\partial}{\partial y} Ua^2 y (x^2+y^2)^{-1}$$

$$v_x = Ua^2 (x^2+y^2)^{-1} - Ua^2 (x^2+y^2)^{-2} 2y^2$$

På y-aksen $x=0$

$$v_x = \frac{Ua^2}{y^2} - \frac{Ua^2 2y^2}{y^4} = -\frac{Ua^2}{y^2}$$

Oppgave 3 b

For potensialstrøm gjelder $\nabla \cdot \mathbb{V} = 0$ og $\nabla \times \mathbb{V} = 0$

Har to potensialfelt $\mathbb{V}_1$ og $\mathbb{V}_2$ slik at

$\nabla \cdot \mathbb{V}_1 = 0$, $\nabla \times \mathbb{V}_1 = 0$ og $\nabla \cdot \mathbb{V}_2 = 0$, $\nabla \times \mathbb{V}_2 = 0$

Superponerer (adderer) de to feltene

$\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$. Da er

$$\nabla \cdot \mathbb{V} = \nabla \cdot (\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) = \nabla \cdot \mathbb{V}_1 + \nabla \cdot \mathbb{V}_2 = 0$$

$$\nabla \times \mathbb{V} = \nabla \times (\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) = \nabla \times \mathbb{V}_1 + \nabla \times \mathbb{V}_2 = 0$$

Altså feltet $\mathbb{V}$ blir også divergens og virvelfritt

Feltet: $\psi = \psi_1 + \psi_2 = Uy - \frac{Ua^2 y}{x^2+y^2}$ har

Strømlinjer $\psi = \psi_0 = \text{konst.}$

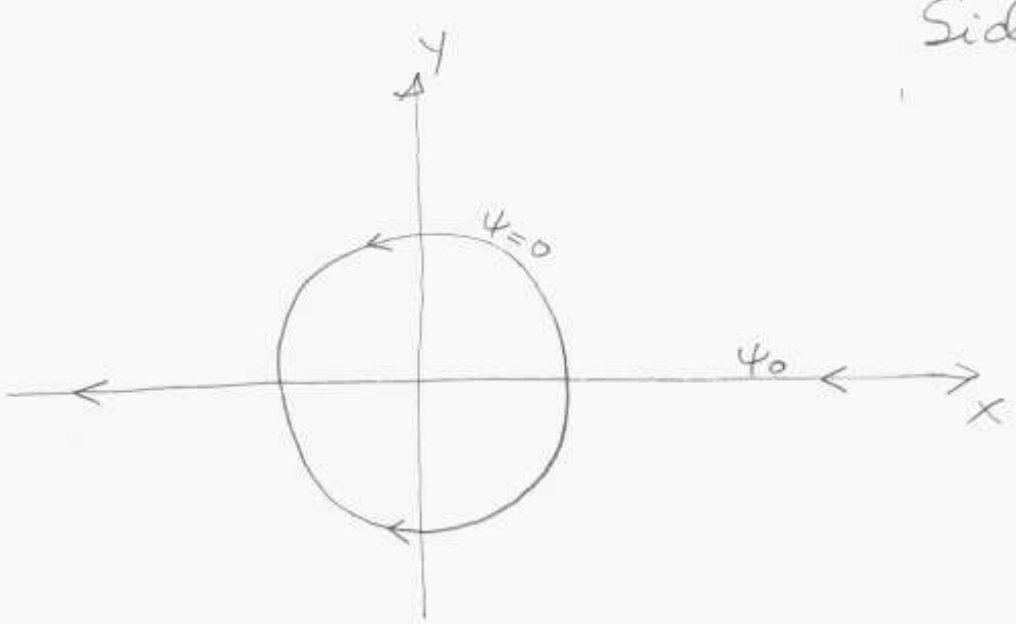
$$Uy - \frac{Ua^2 y}{x^2+y^2} = \psi_0$$

$$Uy\left[1 - \frac{a^2}{x^2+y^2}\right] = \psi_0$$

Strømlinjen $\psi_0 = 0$

$$Uy\left[1 - \frac{a^2}{x^2+y^2}\right] = 0$$

Dvs $y = 0$ (x-aksen) og $x^2 + y^2 = a^2$ (sirkel med radius a)



Skisse av strømlinjen $\psi = 0$.

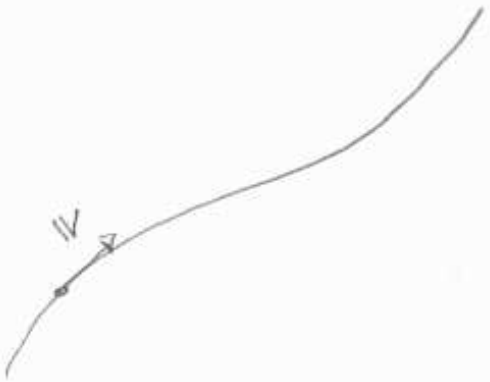
Oppgave 4

a) Får oppgitt Bernoullis likning

$$\boxed{\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}w^2 + gz = H_0}$$

p = trykket i væsken (Pa, N/m^2)
ρ = massetettheten (kg/m^3)
w = strømvektoren (m/s)
g = tyngdeakselerasjonen (m/s^2)
z = høyde over et valgt nullnivå (m)
H_0 = Bernoulli-konstanten

Oppgave 4a, fortsatt



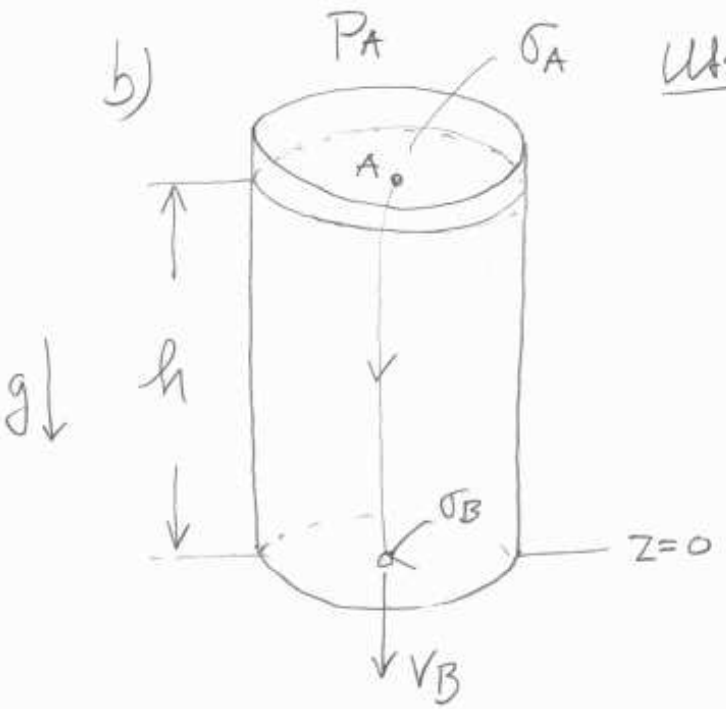
Bernoullis likning i denne formen gjelder for væskestrøm som er:

1) Inkompressibel ($\nabla \cdot V = 0$)
2) Stasjonær
3) Friksjonsfri

Bernoullis likning sier at langs en strømlinje så er

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gz = \text{konstant}$$

b)



Utstrømning fra tank

Tverrsnittsareal av tanken σ_A Areal av åpningen i bunnen σ_B

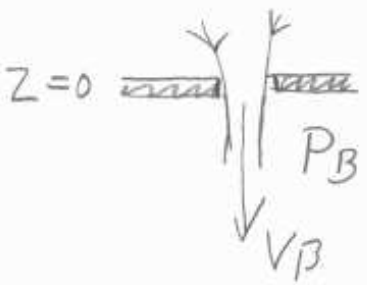
Forutsetter $\sigma_B \ll \sigma_A$

Farten av vannspeilet ved A : V_A

$$V_A \sigma_A = V_B \sigma_B$$

Altså $V_A = \frac{\sigma_B}{\sigma_A} V_B \ll V_B$

Siden V_A er liten er utstrømningen tilnærmet stasjonær. Bruker derfor Bernoulli's likning langs en strømlinje fra A til B



$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2}V_A^2 + gh = \frac{P_B}{\rho} + \frac{1}{2}V_B^2 + g\cdot 0$$

· Nå er trykket i strålen $P_B \cong P_A$ lufttrykket.
og siden $V_A \ll V_B$ får vi

$$gh = \frac{1}{2}V_B^2$$

eller $$V_B = \sqrt{2gh}$$

Formelen ble bekreftet ved forsøk på forelesningene!