Fasit til eksamen i MEK1100 1. juni 2006

Oppgave 1

a)

$$\boldsymbol{v} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = 0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

b) La $\beta(x,y,z) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 2z^2$. Overflaten σ er da gitt ved $\beta = 1$. Gradienten til β står normalt på overflaten σ. En enhetsnormalvektor får vi slik

$$\boldsymbol{n} = \left.\frac{\nabla\beta}{|\nabla\beta|}\right|_{\beta=1} = \left.\frac{2x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 4z\boldsymbol{k}}{\sqrt{4x^2 + y^2 + 16z^2}}\right|_{\beta=1}$$

Deretter må vi undersøke om den enhetsnormalvektoren vi har funnet peker vekk fra origo. Dette gjøres best ved å legge merke til at β øker når vi går vekk fra origo, derfor peker $\nabla\beta$ vekk fra origo. Det kan eventuelt også aksepteres å regne ut $\boldsymbol{n}$ i ett eller flere punkter på overflaten og se at $\boldsymbol{n}$ faktisk peker vekk fra origo.

c) Vi skal vise at dersom vi substituerer inn vinklene θ og ψ i β så blir verdien til β lik 1.

$$\begin{aligned}(\sin\theta\cos\psi)^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{2}\sin\theta\sin\psi)^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)^2 &= \sin^2\theta\cos^2\psi + \sin^2\theta\sin^2\psi + \cos^2\theta \\ &= \sin^2\theta(\cos^2\psi + \sin^2\psi) + \cos^2\theta = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\end{aligned}$$

Dernest kan det nevnes med ord at med den gitte parametrisering og de gitte intervallene for θ og ψ så dekker vi alle mulige retninger ut fra origo av samme grunn som for kulekoordinater.

For å parametrisere $\boldsymbol{n}$ med θ og ψ, så legger vi merke til at betingelsen $\beta = 1$ allerede er identisk oppfylt så vi trenger kun betrakte

$$\boldsymbol{n} = \frac{2\sin\theta\cos\psi\boldsymbol{i} + \sqrt{2}\sin\theta\sin\psi\boldsymbol{j} + 2\sqrt{2}\cos\theta\boldsymbol{k}}{\sqrt{4\sin^2\theta\cos^2\psi + 2\sin^2\theta\sin^2\psi + 8\cos^2\theta}} = \frac{\sqrt{2}\sin\theta\cos\psi\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\psi\boldsymbol{j} + 2\cos\theta\boldsymbol{k}}{\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\psi + 3\cos^2\theta + 1}}$$

Det er mange måter å uttrykke dette svaret, og alle er forsåvidt like riktige.

d) Fluksen av $\boldsymbol{v}$ ut av overflaten σ er $\int_\sigma \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$ hvor vi allerede har regnet ut $\boldsymbol{n}$ ovenfor. Vi bruker Gauss sats og drar fordel av at feltet er divergensfritt

$$\int_\sigma \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \int_\tau \nabla\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\tau = \int_\tau 0\,\mathrm{d}\tau = 0$$

Oppgave 2

a) Potensialet $\phi = Ux$ representerer uniform strøm med hastighet U i positiv x-retning, $\boldsymbol{v} = U\boldsymbol{i}$. Feltet har ingen singulære punkter.

Potensialet $\phi = U\ln\sqrt{x^2+y^2}$ representerer utgående strøm fra en punktkilde i origo, $\boldsymbol{v} = U\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{x^2+y^2} = U\frac{\boldsymbol{i}_r}{r}$. Feltet har et singulært punkt i origo.

b) Først uttrykker vi det fulle potensialet i polarkoordinater ($x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$)

$$\phi = Ur\cos\theta + U\ln r.$$

Så tar vi gradienten

$$\boldsymbol{v} = v_r\boldsymbol{i}_r + v_\theta\boldsymbol{i}_\theta = \nabla\phi = U(\cos\theta + \frac{1}{r})\boldsymbol{i}_r - U\sin\theta\boldsymbol{i}_\theta$$

Strømfunksjonen ψ løses fra differensiallikningene $v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$ og $v_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial r}$. Løsningen er

$$\psi = -Ur\sin\theta - U\theta + c$$

hvor c er en vilkårlig konstant.

c) Stagnasjonspunktet hvor $\boldsymbol{v} = 0$ er gitt ved likningene $U(\cos\theta + \frac{1}{r}) = 0$ og $-U\sin\theta = 0$. Fra den andre likningen finner vi to løsninger for θ, nemlig $\theta = 0$ og $\theta = \pi$. Den første likningen har ingen løsninger for $\theta = 0$, men for $\theta = 1$ finner vi $r = 1$. Det finnes altså ett stagnasjonspunkt

$$(r = 1,\, \theta = \pi) \qquad \text{som tilsvarer} \qquad (x = -1,\, y = 0)$$

La oss regne ut verdien til strømfunksjonen i stagnasjonspunktet $\psi = -U\pi + c$, og dermed vet vi at likningen til strømlinjene som går igjennom stagnasjonspunktet er

$$r\sin\theta + \theta = \pi$$

Etter å ha stirret på denne likningen en stund ser vi at det finnes én løsning $\theta = \pi$ som er den negative delen av x-aksen. Videre finnes det en annen løsning $y = \pi - \theta$. Hvordan denne andre løsningen ser ut finner man lettest ut ved å legge merke til at den har asymptote $y = \pi$ når $\theta \to 0$, den har asymptote $y = -\pi$ når $\theta \to 2\pi$, den har verdi $y = \pi/2$ når $\theta = \pi/2$, den har verdi $y = -\pi/2$ når $\theta = 3\pi/2$, og den går selvfølgelig igjennom stagnasjonspunktet. Dette er en slags liggende "U" som åpner seg mot høyre, og som skiller strømningen ut fra punktkilden i origo fra den uniforme strømningen mot høyre.

Oppgave 3

a) Først finner vi et uttrykk for hastigheten

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j}$$

Så beregner vi virvlingen

$$\nabla\times\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega x & \omega y & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\boldsymbol{k} = 2\boldsymbol{\omega}$$

Virvlingen er ulik null, så feltet er ikke et potensialfelt.

Så beregner vi divergensen

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\partial(-\omega y)}{\partial x} + \frac{\partial(\omega x)}{\partial y} = 0$$

Siden feltet er to-dimensjonalt og er divergensfritt, så har det en strømfunksjon ψ gitt ved likningene $v_x = -\omega y = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$ og $v_y = \omega x = \frac{\partial\psi}{\partial x}$. Fra disse likningene finner vi

$$\psi = \frac{1}{2}\omega(x^2 + y^2) + c$$

hvor c er en vilkårlig konstant.

Se på $|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2} = R$. Dette er en sirkel med radius R og for denne sirkelen ser vi at strømfunksjonen har en konstant verdi. Følgelig er dette en strømlinje.

b) Sirkulasjonen er

$$\Gamma = \oint_{|\boldsymbol{r}|=R} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Integrasjonskonturen kan parametriseres med en vinkel $0 \leq \theta \leq 2\pi$ med formen $\boldsymbol{r}(\theta) = R(\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j})$, og dermed finner vi $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = R(-\sin\theta\boldsymbol{i}+\cos\theta\boldsymbol{j})\mathrm{d}\theta$. Videre ser vi at på sirkelen er $\boldsymbol{v} = \omega R(-\sin\theta\boldsymbol{i}+\cos\theta\boldsymbol{j})$. Dermed finner vi at skalarproduktet $\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \omega R^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\mathrm{d}\theta = \omega R^2\mathrm{d}\theta$. Nå er det enkelt å regne ut sirkulasjonsintegralet

$$\Gamma = \oint_{|\boldsymbol{r}|=R} \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \omega R^2 \mathrm{d}\theta = 2\pi\omega R^2$$

La oss kontrollere svaret med Stokes sats (husk at vi fant virvlingen ovenfor)

$$\Gamma = \oint_{|\boldsymbol{r}|=R} \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{r\leq R} 2\omega\mathrm{d}\sigma = (2\omega)(\pi R^2) = 2\pi\omega R^2$$

c) Lokal akselerasjon

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{\omega_0}{T}(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j})$$

Denne ser vi har samme retning som $\boldsymbol{v}$, altså i fartsretningen. Størrelsen er

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right| = \frac{\omega_0}{T}\sqrt{y^2+x^2} = \frac{\omega_0 R}{T}$$

Konvektiv akselerasjon

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = \left(-\omega y\frac{\partial}{\partial x} + \omega x\frac{\partial}{\partial y}\right)(-\omega y\boldsymbol{i}+\omega x\boldsymbol{j}) = -\omega^2 y\boldsymbol{j} - \omega^2 x\boldsymbol{i} = -\omega^2(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$$

Denne ser vi er rettet inn mot sentrum. Størrelsen er

$$|\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}| = \omega^2 R$$

Den totale akselerasjonen er

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = \frac{\omega_0}{T}(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}) - \omega^2(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$$