Fasit til eksamen i MEK1100 høst 2006

Det er tilsammen 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmåla.

Oppgave 1

Vi har gitt et vektorfelt

$$\boldsymbol{v} = (x + \sin y + z)\boldsymbol{i} + (x^2 - y + \mathrm{e}^z)\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2 + 3)\boldsymbol{k}$$

a) Finn divergensen til $\boldsymbol{v}$.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 1 - 1 = 0$$

b) Finn virvlingen til $\boldsymbol{v}$.

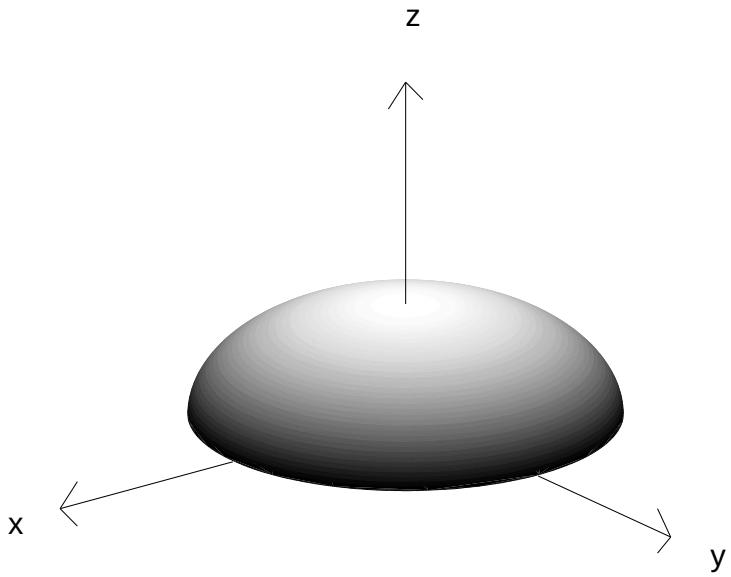
$$\nabla \times \boldsymbol{v} = (2y - \mathrm{e}^z)\boldsymbol{i} + (1 - 2x)\boldsymbol{j} + (2x - \cos y)\boldsymbol{k}$$

c) Diskuter om $\boldsymbol{v}$ er et potensialfelt, og finn i så fall potensialet. Diskuter om $\boldsymbol{v}$ har en strømfunksjon, og finn i så fall strømfunksjonen.

Siden virvlingen er forskjellig fra null så er dette ikke et potensialfelt.

Feltet er divergensfritt og det utelukker ikke at en strømfunksjon kan eksistere. Feltet er imidlertid tredimensjonalt i xyz-koordinatene og har derfor ikke en strømfunksjon som kan uttrykkes ved to av disse koordinatene på den vanlige måten i kurset.

Vi ser nå på en lukket overflate σ som er satt sammen av en "topp" σ_T og en "bunn" σ_B. Toppen σ_T er gitt ved likningen $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$ avgrenset av $z \geq 0$. Bunnen σ_B er gitt ved $z = 0$ avgrenset av $x^2+y^2 \leq 1$. Toppen og bunnen avgrenser et volum τ. Se figur.



d) Finn enhetsnormalvektorer til σ_T og σ_B som peker ut av volumet τ

La $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2$. Toppen er gitt ved $f = 1$. Legg merke til at f øker når vi beveger oss vekk fra volumet τ. Dermed kan vi skrive

$$\boldsymbol{n}_T = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 4z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 16z^2}}$$

La $g(x, y, z) = -z$. Bunnen er gitt ved $g = 0$. Legg merke til at g øker når vi beveger oss vekk fra volumet τ. Dermed kan vi skrive

$$\boldsymbol{n}_B = \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = -\boldsymbol{k}$$

e) Regn ut fluksen q_B av $\boldsymbol{v}$ ut fra volumet τ gjennom bunnen σ_B.

$$q_B = \int_{\sigma_B} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_B \, \mathrm{d}\sigma = -\int_{\sigma_B} (x^2 + y^2 + 3)\mathrm{d}\sigma = -\int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 + 3) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = -\frac{7\pi}{2}$$

hvor vi har introdusert polare koordinater $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$ slik at $\mathrm{d}\sigma = r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$, og slik at σ_B er gitt ved $0 \leq r \leq 1$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

f) Regn ut fluksen q_T av $\boldsymbol{v}$ ut fra volumet τ gjennom toppen σ_T.

$$q_T = \int_{\sigma_T} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_T \, \mathrm{d}\sigma,$$

men dette integralet er sannsynligvis vanskelig å regne ut direkte. Vi kan benytte Gauss sats fordi $\boldsymbol{v}$ ikke har noen singulære punkter

$$\int_\tau \nabla \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\tau = \int_{\sigma_T} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_T \, \mathrm{d}\sigma + \int_{\sigma_B} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_B \, \mathrm{d}\sigma = q_T + q_B$$

hvor vi har splittet opp overflateintegralet i en toppdel og en bunndel. Siden feltet er divergensfritt så ser vi at venstresiden blir identisk lik null. Derfor har vi

$$q_T = -q_B = \frac{7\pi}{2}$$

Oppgave 2

Vi ser på plan strøm som er divergensfri og virvelfri overalt utenom singulære punkter. En strømfunksjon er gitt ved en sum av to ledd

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \qquad \text{hvor} \qquad \psi_1 = -Uy \qquad \text{og} \qquad \psi_2 = \frac{Ua^2 y}{x^2 + y^2}$$

hvor a og U er konstanter.

a) Det kan være en fordel å uttrykke dette strømfeltet i plane polarkoordinater $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$. Skriv strømfunksjonene ψ_1 og ψ_2 i polarkoordinater.

$$\psi_1 = -Ur\sin\theta \qquad \text{og} \qquad \psi_2 = \frac{Ua^2 \sin\theta}{r}$$

Vis at det totale hastighetsfeltet er

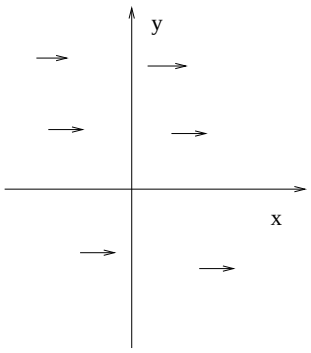
$$\boldsymbol{v} = U\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta\, \boldsymbol{i}_r - U\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta\, \boldsymbol{i}_\theta.$$

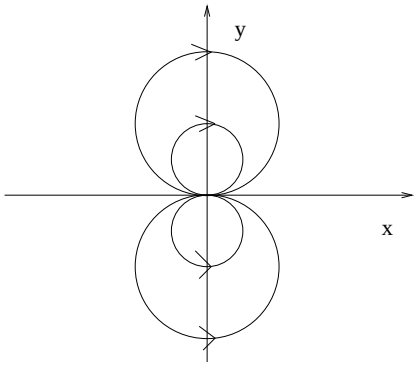
$$v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad \text{og} \qquad v_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial r}$$

Gi navn til strømfeltene representert ved ψ_1 og ψ_2, tegn en skisse for hvert av disse strømfeltene, angi retningen til strømfeltene, og angi hvor eventuelle singulære punkter er lokalisert.

ψ_1 representerer en rettlinjet strøm i positiv x-retning og har ingen singulære punkter.

ψ_2 representerer en dipol i origo orientert i x-retning slik at strømmen går igjennom origo i negativ x-retning. Origo er et singulært punkt.





b) Regn ut sirkulasjonen til strømfeltet representert ved ψ rundt sirkelen $r = R$.

$$\oint_{r=R} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} -U(1 + \frac{a^2}{R^2}) \sin\theta \, R \, \mathrm{d}\theta = 0$$

hvor vi har benyttet at $\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{i}_r$ og $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{i}_\theta \, \mathrm{d}\theta$. Merk at vi ikke kan bruke Greens eller Stokes sats for å finne denne sirkulasjonen fordi feltet har et singulært punkt inne i integrasjonsområdet.

Regn deretter ut sirkulasjonen rundt ellipsen gitt ved likninga $(x-5a)^2+(2y-4a)^2 = a^2$.

I prinsippet kan vi regne ut dette integralet direkte, men det er sannsynligvis vanskelig. Istendenfor kan vi starte med å identifisere lokaliseringen til ellipsen, nemlig sentrum $(x = 5a, y = 2a)$, store halvakse a langs x-aksen, lille halvakse $a/2$ langs y-aksen. Vi innser at ellipsen ikke omslutter origo, og følgelig er det ingen singulære punkter inne i ellipsen. Nå benytter vi oss av Stokes sats, og det faktum at feltet er virvelfritt, $\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$,

$$\oint_{(x-5a)^2+(2y-4a)^2=a^2} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{(x-5a)^2+(2y-4a)^2 \leq a^2} \nabla \times \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{k} \, \mathrm{d}\sigma = 0$$

c) Finn stagnasjonspunktene til strømfeltet representert ved ψ. Finn deretter strømlinjene som går gjennom stagnasjonspunktene.

Stagnasjonspunkt(er) er løsninger av

$$\begin{aligned} v_r &= U(1 - \frac{a^2}{r^2})\cos\theta = 0 \\ v_\theta &= -U(1 + \frac{a^2}{r^2})\sin\theta = 0 \end{aligned}$$

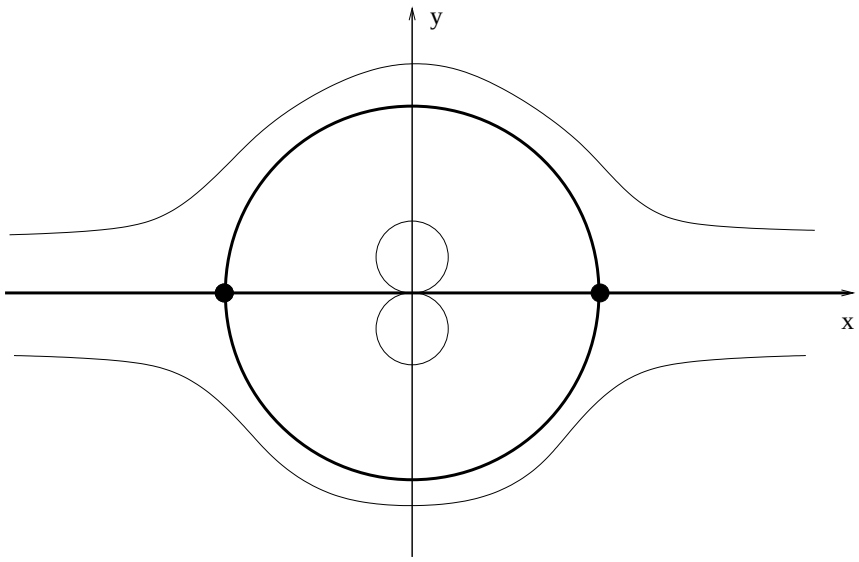
Dette systemet har to løsninger $(r = a, \theta = 0)$ og $(r = a, \theta = \pi)$, som henholdsvis svarer til $(x = a, y = 0)$ og $(x = -a, y = 0)$.

Strømlinjene gjennom stagnasjonspunktene finner vi ved å sette inn koordinatene til stagnasjonspunktene i uttrykket for strømfunksjonen, og vi må følgelig løse

$$\psi = -U(r - \frac{a^2}{r})\sin\theta = 0$$

Denne likninga har to løsninger: (1) sirkelen $r = a$ og (2) x-aksen.

Skisser strømfeltet, indiker stagnasjonspunktene, og marker strømlinjene som går gjennom stagnasjonspunktene.



Her er stagnasjonspunktene markert som store svarte punkter, og strømlinjene gjennom stagnasjonspunktene er markert som tykke kurver.

Forklar hvordan dette strømfeltet kan representere vind som blåser på tvers av et langstrakt telt med halvsirkelformet tverrsnitt (et såkalt tunnelltelt).

For å la dette feltet representere vind på tvers av et halvsirkelformet telt, la bakken være x-aksen og la teltet være $r \leq a$ for $y \geq 0$.

d) Vi skal nå betrakte luftstrømmen på tvers av et telt som så på i forrige oppgave. Vi lar tyngdens akselerasjon $\boldsymbol{g}$ væer rettet i negativ y-retning. Tettheten til lufta er ρ. Vi gjør dessuten den urealistiske forenklingen at teltduken er stiv og ikke deformerer seg når det blåser.

Vi skal la lufttrykket p rundt teltet være gitt ved Bernoullis likning. Skriv ned Bernoullis likning (utledning ikke nødvendig) og forklar når og hvordan denne likningen kan brukes.

Bernoullis likning forutsetter

1. Friksjonsfri strømning
2. Stasjonær strømning
3. Konstant tetthet eller inkompressibelt fluid

Da er $\dfrac{p}{\rho} + \dfrac{1}{2}v^2 + gy$ konstant langs en strømlinje.

Regn ut total kraft $\boldsymbol{F}$ som virker fra lufta på teltet. Forklar ut fra dette svaret hvorfor det kan være en god idé å bardunere teltet godt på en vindfull dag.

I det følgende regner vi ut total kraft som virker på teltet fra lufta *på utsiden av teltet*. Det er selvfølgelig luft inne i teltet også, men det har vi sett bort fra i løsningen nedenfor.

Velg strømlinjen $r = a$. Velg stagnasjonspunktet $(r = a, \theta = 0)$ som referansepunkt hvor vi setter $p = p_0$. Langs denne strømlinjene har vi hastighet

$$\boldsymbol{v} = v_\theta|_{r=a}\,\boldsymbol{i}_\theta = -2U\sin\theta\boldsymbol{i}_\theta$$

Bernoullis likning gir nå trykket langs strømlinjen

$$p = -2\rho U^2\sin^2\theta - \rho ga\sin\theta + p_0$$

Enhetsnormalvektor til teltet er $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}_r = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}$, og et infinitesimalt overflateelement langs teltduken er $\mathrm{d}\sigma = a\,\mathrm{d}\theta$. Den totale kraften pr. lengdeenhet fra lufta på teltet blir da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= -\int_{r=a,0\le\theta\le\pi} p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \\
&= -\int_0^\pi (-2\rho U^2\sin^2\theta - \rho ga\sin\theta + p_0)(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j})\,a\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{8}{3}\rho aU^2\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}\rho g\pi a^2\boldsymbol{j} - 2ap_0\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

Det første leddet representerer vind-indusert løft som virker oppover. Det andre leddet representerer oppdrift, dvs. en vertikal kraft lik vekten av den fortrengte lufta. Det tredje leddet representerer nedoverrettet kraft på grunn av lufttrykket ved bakken.

(Dersom vi i tillegg hadde tatt hensyn til lufta inne i teltet så ville vi fått bidrag som hadde kanselert ut andre og tredje ledd ovenfor, og da hadde vi kun sittet igjen med det vind-induserte løftet.)

Dersom vinden blir tilstrekkelig sterk vil det vind-induserte løftet bli så stort at teltet vil løftes opp fra bakken. Derfor kan det være lurt å bardunere godt.

Formler:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\boldsymbol{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\boldsymbol{i}_\theta, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}$$

$$\int\sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\sin^3\theta}{3}, \qquad \int\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta$$