LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN MEK1100 VÅR 2007

av Bjørn Gjevik

Oppgave 1

a) Divergensen: $\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(y+z) + \frac{\partial}{\partial y}(x+z) + \frac{\partial}{\partial z}(x+y+z)$$

$$= \underline{\underline{1}}$$

Virvlingen: $\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(x+y+z) - \frac{\partial}{\partial z}(x+z)\right]\mathbf{i}$$

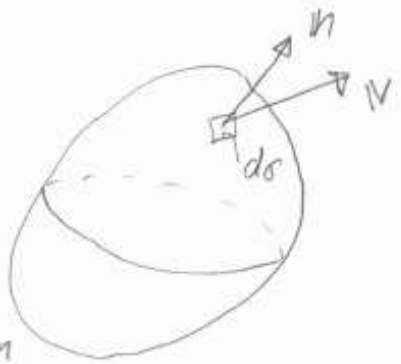
$$- \left[\frac{\partial}{\partial x}(x+y+z) - \frac{\partial}{\partial z}(y+z)\right]\mathbf{j}$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(x+z) - \frac{\partial}{\partial y}(y+z)\right]\mathbf{k}$$

$$= (1-1)\,\mathbf{i} + (1-1)\,\mathbf{j} + (1-1)\,\mathbf{k} = \underline{\underline{0}}$$

b) Gauss sats.

$$\int_\tau \nabla \cdot \mathbf{V}\, d\tau = \int_\sigma \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$



Volumintegralet av divergensen til vektoren er lik vektorfluksen gjennom flaten som avgrenser volumet.

σ	lukket flate
$d\sigma$	flateelement
$\mathbb{n}$	normalvektoren til flaten
τ	volumet begrenset av flaten σ
$d\tau$	volumelement

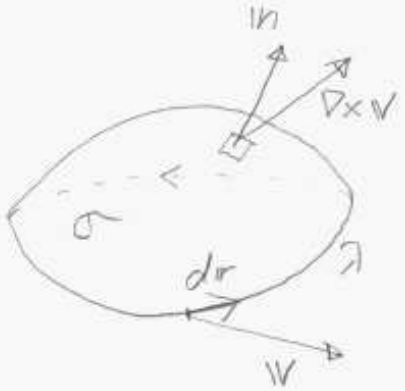
c) Vektorfluksen gjennom sideflaten av terningen

$$\int_\sigma \mathbb{V}\cdot\mathbb{n}\,d\sigma = \int_\tau \nabla\cdot\mathbb{V}\,d\tau = \int_\tau 1\cdot d\tau = \tau = \underline{\underline{a^3}}$$

Resultatet blir uavhengig av hvor sentrum av terningen ligger og hvordan den er orientert retningsmessig, fordi divergensen $\nabla\cdot\mathbb{V}$ er konstant.

d) Stokes sats:

$$\int_\sigma \nabla\times\mathbb{V}\cdot\mathbb{n}\,d\sigma = \oint_\lambda \mathbb{V}\cdot d\mathbb{r}$$



Flateintegralet (vektorfluksen) av virvelingen $\nabla\times\mathbb{V}$ gjennom flaten σ er lik sirkulasjonen av vektoren $\mathbb{V}$ omkring den lukkede kurven λ som begrenser flaten σ. Positiv integrasjonsretning som vist på figuren

σ flate

$d\sigma$ flateelement

$\mathbb{n}$ flatenormal

λ lukket kurve som begrenser flaten σ

$d\mathbb{r}$ vektoriell bueelement langs kurven λ

Sirkulasjonen av vektoren $\mathbb{V}$ (gitt i punkt a) er:

$$\oint_\lambda \mathbb{V} \cdot d\mathbb{r} = \int_\sigma \nabla \times \mathbb{V} \cdot \mathbb{n}\, d\sigma = \int_\sigma 0 \cdot \mathbb{n}\, d\sigma = \underline{\underline{0}}$$

e) Det eksisterer en potensialfunksjon ϕ for vektorfeltet $\mathbb{V}$ fordi $\nabla \times \mathbb{V} = 0$

Altså $\mathbb{V} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbb{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbb{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbb{k}$

Derfor er:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = y + z$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = x + z$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = x + y + z$$

Integrer disse tre likningene og får henholdsvis:

$$\phi = xy + xz + f_1(y,z)$$

$$\phi = xy + yz + f_2(x,z)$$

$$\phi = xz + yz + \tfrac{1}{2}z^2 + f_3(x,y)$$

hvor $f_1(y,z)$, $f_2(x,z)$ og $f_3(x,y)$ er funksjoner som må bestemmes.
For å få entydig ϕ må vi velge:

$$f_1(y,z) = yz + \tfrac{1}{2}z^2$$

$$f_2(x,z) = xz + \tfrac{1}{2}z^2$$

$$f_3(x,y) = xy$$

Slik at:

$$\underline{\underline{\phi = xy + xz + yz + \tfrac{1}{2}z^2}}$$

Sjekker at dette gir riktig vektor $\vec{V}$

$$V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = y + z$$

$$V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = x + z$$

$$V_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = x + y + z$$

Oppgave 2

a) Setter inn $V_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$, $V_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}$ i

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = 0$$

fordi $\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial r}$

Følgelig er feltet divergensfritt uavhengig av formen på ψ (forutsatt at den er deriverbar) ψ kalles strømfunksjonen.

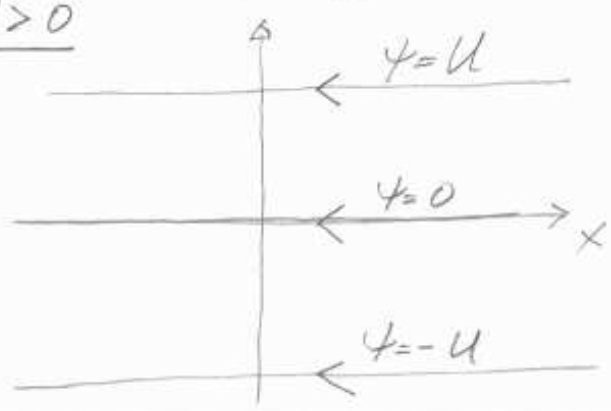
b) Feltet $\psi_1 = Uy$ kalles uniformt felt eller rettlinjet strøm.

Strømlinjene gitt ved

$$\psi_1 = Uy = \psi_0 = \text{konstant}$$

$$y = \frac{\psi_0}{U}$$

$U > 0$



Strømkomponentene:

$$V_x = -\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = U$$

$$V_y = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0$$

Brukes til å angi retning på strømlinjene

Feltet $\psi_2 = -\frac{Ua^2 y}{x^2+y^2}$ Kalles <u>dipolfeltet</u>.

Strømlinjer gitt ved

$$\psi_2 = -\frac{Ua^2 y}{x^2+y^2} = \psi_0 = \text{konst}.$$

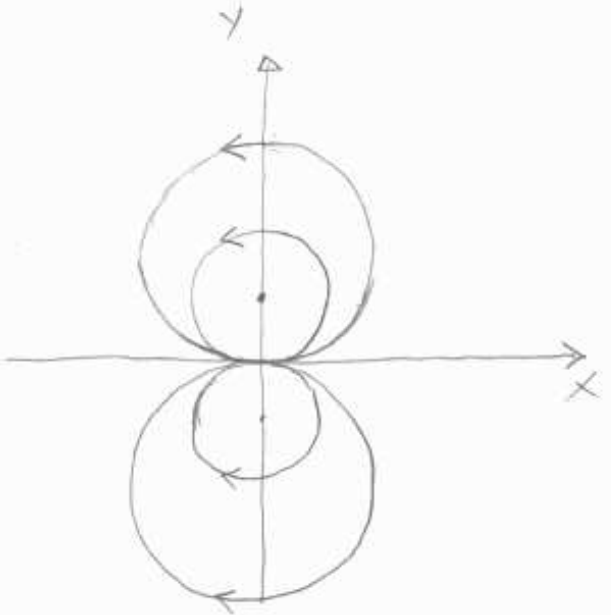
Derav:

$$x^2 + y^2 + \frac{Ua^2}{\psi_0} y = 0$$

$$x^2 + y^2 + \frac{Ua^2}{\psi_0} y + \left(\frac{Ua^2}{2\psi_0}\right)^2 = \left(\frac{Ua^2}{2\psi_0}\right)^2$$

$$x^2 + \left(y + \frac{Ua^2}{2\psi_0}\right)^2 = \left(\frac{Ua^2}{2\psi_0}\right)^2$$

Sirkler med sentrum i $\left(0, -\frac{Ua^2}{2\psi_0}\right)$
og radius $\frac{Ua^2}{2\psi_0}$



Strømkomponenten:

$$v_x = -\frac{\partial \psi_2}{\partial y}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial y}\left[-Ua^2 y (x^2+y^2)^{-1}\right]$$

$$= Ua^2\left[(x^2+y^2)^{-1} - 2y^2(x^2+y^2)^{-2}\right]$$

$$= Ua^2 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

For $x=0$ (på y-aksen)

$v_x = -Ua^2/y^2 < 0$

Feltet $\psi_3 = Ua \ln[(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}]$

kalles punktvirvelfeltet

Strømlinjer gitt ved:

$$\psi_3 = Ua \ln[(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}] = \psi_0 = \text{konst}$$

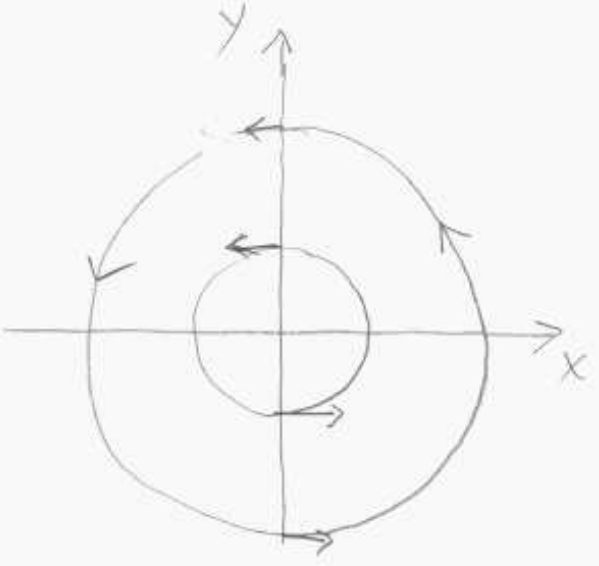
Derav:

$$\frac{1}{2} Ua \ln(x^2+y^2) = \psi_0$$

$$e^{\ln(x^2+y^2)} = e^{\frac{2\psi_0}{Ua}}$$

$$x^2+y^2 = e^{\frac{2\psi_0}{Ua}}$$

Sirkler med sentrum i origo og radius $e^{\frac{\psi_0}{Ua}}$



Strømkomponenten

$$V_x = -\frac{\partial \psi_3}{\partial y}$$

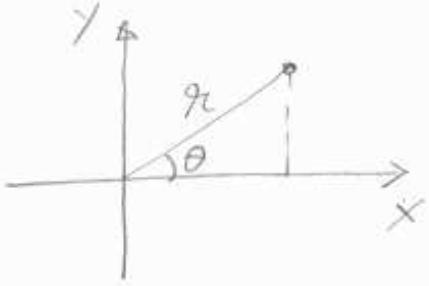
$$= -\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{Ua}{2} \ln(x^2+y^2)\right]$$

$$= -\frac{Ua}{2} \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2y$$

$$= -\frac{Uay}{x^2+y^2}$$

På y-aksen $x=0$ $V_x = -\frac{Ua}{y}$

c) Polarkoordinater



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$$
$$= Ur\sin\theta - \frac{Ua^2 r\sin\theta}{r^2} + Ua\ln r$$
$$= \underline{\underline{U\left[\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta + a\ln r\right]}}$$

Sirkelen $r = a$ er en strømlinje fordi:

$$\psi(r=a) = U\left[\left(a - \frac{a^2}{a}\right)\sin\theta + a\ln a\right]$$
$$= Ua\ln a = \underline{\underline{konst.}}$$

d) Strømkomponentene:

$$V_r = -\frac{\partial\psi}{r\partial\theta} = -\frac{U}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta + a\ln r\right]$$
$$= \underline{\underline{U\left(\frac{a^2}{r^2} - 1\right)\cos\theta}}$$

$$V_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}U\left[\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta + a\ln r\right]$$
$$= \underline{\underline{U\left[\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta + \frac{a}{r}\right]}}$$

På sirkelen $r = a$

$$\underline{V_r = 0 \quad \text{og} \quad V_\theta = U[2\sin\theta + 1]}$$

$$V_\theta = U[2\sin\theta + 1] = \pm U$$

for $\theta = 0, \pi$ og $\frac{3\pi}{2}$

Altså $|\mathbb{V}| = U$ i disse 3 punktene

e) Strømmen er stasjonær, og siden den er virvelfri kan vi gå ut fra at den er friksjonsfri. Da kan Bernoullis likning brukes langs en strømlinje ($r = a$). Bernoullis likning sier

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\mathbb{V}^2 + gz = \text{Konstant}$$

langs strømlinje. Siden strømmen foregår i horisontalplanet xy ($z = 0$) faller tyngdeleddet gz ut. På sirkelen er: $\mathbb{V}^2 = V_\theta^2 = U^2[1 + 2\sin\theta]^2$. Følgelig er:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2}[1 + 2\sin\theta]^2 = H_0 = \text{konst}$$

Nå vet vi at for $\theta = 0$ er $p = p_0$. Derfor

$$H_0 = \frac{p_0}{\rho} + \frac{U^2}{2}$$

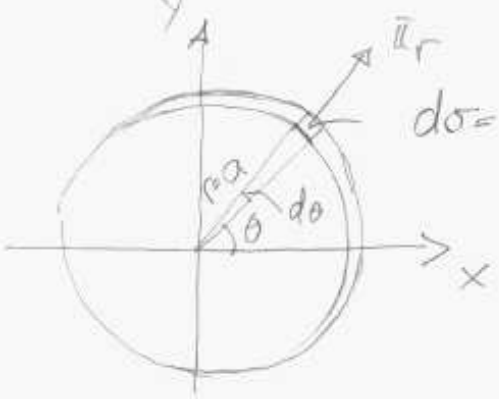
Vi får:

$$p + \frac{\varrho U^2}{2}(1+2\sin\theta)^2 = p_0 + \frac{\varrho U^2}{2}$$

$$p + \varrho\frac{U^2}{2}(1+4\sin\theta+4\sin^2\theta) = p_0 + \frac{\varrho U^2}{2}$$

$$\underline{p = p_0 - 2\varrho U^2 \sin\theta(1+\sin\theta)}$$

Trykk-kraften på en sylinder per lengdeenhet



$d\sigma = 1 \cdot a\, d\theta$

$$\mathbb{F} = -\int p\,\mathbb{n}\,d\sigma$$

$$= -\int_0^{2\pi} p(r=a)\,\mathbb{I}_r\, a\, d\theta$$

$\mathbb{I}_r = \cos\theta\,\mathbb{i} + \sin\theta\,\mathbb{j}$

Innsatt får vi at kraften $\mathbb{F}$ er:

$$\mathbb{F} = -\int_0^{2\pi}\left[p_0 - 2\varrho U^2\sin\theta(1+\sin\theta)\right](\cos\theta\,\mathbb{i} + \sin\theta\,\mathbb{j})\,a\,d\theta$$

$$= -p_0 a\left[\mathbb{i}\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta + \mathbb{j}\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta\right]$$

($\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta = 0$, $\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta = 0$)

$$+ 2\varrho U^2 a\left[\mathbb{i}\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta + \mathbb{j}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta\right]$$

($\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta = 0$)

$$+ 2\varrho U^2 a\left[\mathbb{i}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta + \mathbb{j}\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\,d\theta\right]$$

($\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta = 0$)

$$= \underline{2\pi\varrho U^2 a\,\mathbb{j}}$$

fordi alle andre integral enn $\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta = \pi$ er lik null