Fasit for eksamen i MEK1100 torsdag 13. desember 2007

Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for perfekt svar).

Oppgave 1

Vi har gitt to vektorfelt i kartesiske koordinater (x, y, z)

$$\boldsymbol{A} = y\boldsymbol{i} + \cos z\boldsymbol{j} + xy^2\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{B} = x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 3z\boldsymbol{k}$$

a) Regn ut divergensen til $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{B}$.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 1 + 2 + 3 = 6$$

b) Regn ut virvlingen til $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{B}$.

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = (2xy + \sin z)\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} = 0$$

c) Diskuter om $\boldsymbol{A}$ eller $\boldsymbol{B}$ kan skrives som gradienten av et potensial, ϕ_A eller ϕ_B, og finn i så fall potensialet.

$\boldsymbol{A}$ har ikke et potensial fordi $\boldsymbol{A}$ har virvling. $\boldsymbol{B}$ har et potensial fordi $\boldsymbol{B}$ er virvelfri,

$$\phi_B = \frac{1}{2}x^2 + y^2 + \frac{3}{2}z^2 + c \qquad (c \text{ er en vilkårlig konstant})$$

Diskuter om $\boldsymbol{A}$ eller $\boldsymbol{B}$ kan skrives ved hjelp av en strømfunksjon, ψ_A eller ψ_B, og finn i så fall strømfunksjonen.

$\boldsymbol{B}$ har divergens ulik null og har derfor ikke en strømfunksjon. $\boldsymbol{A}$ er divergensfri og dette utelukker ikke at $\boldsymbol{A}$ har en strømfunksjon. $\boldsymbol{A}$ er imidlertid tredimensjonal i xyz-koordinatene og har derfor ikke en strømfunksjon uttrykt ved to av disse koordinatene på den vanlige måten i kurset.

d) Regn ut sirkulasjonen til $\boldsymbol{A}$ rundt en sirkel med radius a, med sentrum i origo, som ligger i xy-planet. Bekreft svaret ved hjelp av Stokes sats.

Sirkelen kan parametriseres $\boldsymbol{r}(\theta) = a\boldsymbol{i}_r = a(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j})$ for $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Vi må beregne differensialet $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{i}_\theta \mathrm{d}\theta$ og beregne $\boldsymbol{A}$ langs sirkelen. Med kartesiske vektorer (kan også gjøres med polare vektorer):

$$\oint_{r=a,z=0} \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} (a\sin\theta\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+a^3\cos\theta\sin^2\theta\boldsymbol{k})\cdot(-a\sin\theta\boldsymbol{i}+a\cos\theta\boldsymbol{j})\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} -a^2\sin^2\theta + a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = -\pi a^2$$

Bekrefte svaret med Stokes sats

$$\int_{r\leq a,z=0} \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{r\leq a} (-1)\,\mathrm{d}\sigma = -\pi a^2$$

e) Finn strømlinjen til $\boldsymbol{B}$ som går gjennom punktet $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

Strømlinene er definert ved

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{B} = (3z\mathrm{d}y - 2y\mathrm{d}z)\boldsymbol{i} + (x\mathrm{d}z - 3z\mathrm{d}x)\boldsymbol{j} + (2y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y)\boldsymbol{k} = 0$$

Dette gir oss tre koblede separable differensiallikninger som vi kan løse ved integrasjon fra $\boldsymbol{r}_0$ til et vilkårlig punkt slik

$$\int_1^y \frac{\mathrm{d}y}{2y} = \int_1^z \frac{\mathrm{d}z}{3z} = \int_1^x \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Vi kan skrive svaret på forskjellige måter, for eksempel $y^{1/2} = z^{1/3} = x$, eller på parametrisk form $y = x^2$ og $z = x^3$.

Alternativt svar: Strømlinjer er identisk med partikkelbaner for stasjonære felt, så dersom vi lar t være tid

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2y \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 3z$$

Dette kan gi parameterframstillingen $x = \exp(t)$, $y = \exp(2t)$ og $z = \exp(3t)$.

Oppgave 2

I Oslofjorden har vi strøm som skyldes både tidevann, vind og avrenning fra elver. Vi skal betrakte en idealisert problemstilling hvor x-aksen legges langs fjorden og y-aksen legges på tvers av fjorden. Fjorden har rette sidekanter ved $y = 0$ og $y = B$. Vi skal betrakte en overflatestrøm på formen

$$\boldsymbol{v} = y(B-y)[\alpha + \beta\sin(\Omega t)]\boldsymbol{i}$$

Her er α proporsjonal med avrenningen fra elver og vind og β er proporsjonal med styrken på tidevannstrømmen. Videre er t tid, $\Omega = 2\pi/T$ hvor T er perioden for

tidevannet.

a) På danskebåten er det smuglere som har lastet varer i en beholder som de kaster ut i fjorden. Denne beholderen flyter i overflaten og blir fraktet med overflatestrømmen som om den var en væskepartikkel. Finn akselerasjonen til beholderen; forklar hva som er lokal, konvektiv og total akselerasjon.

Lokal akselerasjon

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = y(B-y)\beta\Omega\cos(\Omega t)\boldsymbol{i}$$

Konvektiv akselerasjon er lik null

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla = y(B-y)[\alpha+\beta\sin(\Omega t)]\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = 0 \qquad \text{(fordi } \boldsymbol{v} \text{ ikke har } x\text{-avhengighet)}$$

Total akselerasjon er summen av lokal og konvektiv akselerasjon, og er i dette tilfellet identisk med lokal akselerasjon

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = y(B-y)\beta\Omega\cos(\Omega t)\boldsymbol{i}$$

b) Vi skal sette $B = 2$, $\alpha = \beta = 1$, $\Omega = 0.01$. Ved tiden $t = 0$ ble beholderen observert ved $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{j}$. Finn posisjonen til beholderen ved tiden $t = 10$.

Vi må integrere $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}$ fra $t_0 = 0$ og $\boldsymbol{r}_0$ til $t = 10$ og $\boldsymbol{r}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y(B-y)[\alpha+\beta\sin(\Omega t)]$$

$$y = y_0 \qquad x = x_0 + y_0(B-y_0)\left[\alpha t - \frac{\beta}{\Omega}(\cos(\Omega t)-1)\right]$$

Innsatt verdier

$$y = 1 \qquad x = 10 - 100\,(\cos(0.1)-1)$$

Merk: Det kreves ikke å regne ut numerisk at svaret er $x \approx 10.500$

Oppgave 3

I denne oppgaven skal vi først studere en punktkilde i todimensjonalt rom og deretter studere hvordan denne strømningen modifiseres når punktkilden er nær en vegg. I denne oppgaven er strømfeltet stasjonært.

a) I dette punktet skal vi bruke både kartesiske koordinater (x, y) og polarkoordinater (r, θ) hvor $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$. Gradienten av en skalar ϕ i

polarkoordinater er gitt ved

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\boldsymbol{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\boldsymbol{i}_\theta$$

Potensialet for en punktkilde i origo får vi ved å løse Laplace likning slik at potensialet kun er en funksjon av r, $\phi = \phi(r)$. Dersom potensialet kun er en funksjon av r så reduserer Laplace likning seg til

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 0$$

Finn potensialet for en punktkilde som har total utstrømning (styrke) lik A. Skriv hastighetsfeltet i polarkoordinater (med enhetsvektorer $\boldsymbol{i}_r$, $\boldsymbol{i}_\theta$) og i kartesiske koordinater (med enhetsvektorer $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$).

Først løser vi Laplace likning i polarkoordinater ved å integrere to ganger, og får $\phi = \alpha \ln r + \beta$.
Så bestemmer vi hastigheten i polarkoordinater $\boldsymbol{v} = \nabla\phi = \frac{\alpha}{r}\boldsymbol{i}_r$.
Så regner vi ut total utstrømning gjennom en sirkel med radius a

$$\int_{r=a} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{i}_r \,\mathrm{d}\sigma = \int_{r=a} \frac{\alpha}{r}\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi} \alpha\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\alpha = A$$

Følgelig bestemmer vi $\alpha = \frac{A}{2\pi}$, og vi kan likegodt sette $\beta = 0$.
Svaret er følgelig

$$\phi = \frac{A}{2\pi}\ln r = \frac{A}{2\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{A}{2\pi r}\boldsymbol{i}_r = \frac{A}{2\pi}\,\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}$$

b) I dette punktet lar vi x-aksen være bakken og vi lar y-aksen peke vertikalt oppover. Vi skal tenke oss at vi har en punktkilde med styrke A i posisjon $\boldsymbol{r}_0 = h\boldsymbol{j}$, det vil si i en høyde h over bakken. Vi vet at det ikke kan blåse gjennom bakken. For å lage en matematisk modell for det resulterende hastighetsfeltet tar vi en lineær superposisjon av en kilde i punktet $\boldsymbol{r}_0$ og en identisk kilde i punktet $-\boldsymbol{r}_0$. Skriv ned uttrykket for det totale potensialet. Skriv det totale hastighetsfeltet i kartesiske koordinater. Finn stagnasjonspunktene for denne strømmen og vis at det ikke er strøm gjennom bakken.

Lineær superposisjon av kilde i $\boldsymbol{r}_0 = h\boldsymbol{j}$ og kilde i $-\boldsymbol{r}_0 = -h\boldsymbol{j}$

$$\phi = \frac{A}{2\pi}\left\{\ln\sqrt{x^2+(y-h)^2} + \ln\sqrt{x^2+(y+h)^2}\right\}$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{A}{2\pi}\left\{\frac{x\boldsymbol{i}+(y-h)\boldsymbol{j}}{x^2+(y-h)^2} + \frac{x\boldsymbol{i}+(y+h)\boldsymbol{j}}{x^2+(y+h)^2}\right\}$$

Stagnasjonspunkter finnes som løsning av $v_x = 0$ og $v_y = 0$, og disse gir henholdsvis $x = 0$ og $y = 0$. Origo er det eneste stagnasjonspunktet.
Ved bakken ($y = 0$) har vi

$$\boldsymbol{v} = \frac{A}{2\pi}\left\{\frac{x\boldsymbol{i} - h\boldsymbol{j}}{x^2+h^2} + \frac{x\boldsymbol{i} + h\boldsymbol{j}}{x^2+h^2}\right\} = \frac{A}{2\pi}\frac{2x\boldsymbol{i}}{x^2+h^2}$$

Hastigheten er langs bakken ved bakken, det er ikke strøm gjennom bakken.

c) Vi bruker hastighetsfeltet fra forrige punkt og antar at det som strømmer er luft med konstant tetthet ρ. Trykket er lik p_0 der hvor hastigheten er lik 0. Strømningen vil forårsake trykk-variasjoner langs bakken. Vi skal finne ut om det er undertrykk eller overtrykk i forhold til likevektstrykket p_0. Finn ekstremalpunkter og ekstremalverdier for trykket langs bakken. Skisser grafen til trykket langs bakken. Forklar nøye alle antakelsene du gjør.

Vi har stasjonær friksjonsfri strøm og konstant tetthet, følgelig gjelder Bernoullis likning som sier at $p/\rho + v^2/2 + gy$ er konstant langs en strømlinje. Velg strømlinjen som går langs bakken, $y = 0$,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} \qquad \text{hvor} \qquad v = v_x = \frac{A}{2\pi}\frac{2x}{x^2+h^2}$$

Vi får

$$p = p_0 - \left(\frac{A}{2\pi}\right)^2 \frac{2x^2\rho}{(x^2+h^2)^2}$$

Minimum oppnås ved $x = \pm h$ hvor $p = p_0 - \left(\frac{A}{2\pi}\right)^2 \frac{\rho}{2h^2}$. Legg merke til at $p \leq p_0$ overalt, dette er følgelig et **undertrykk**.
Maksimum oppnås ved $x = 0$ hvor $p = p_0$ og ved $x \to \pm\infty$ hvor $p \to p_0$.

