LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN MEK1100
2. JUNI 2008

av Bjørn Gjevik

Oppgv. 1

a) Divergensen $\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} =$

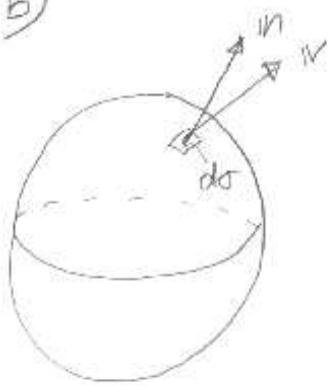
$$\frac{\partial}{\partial x}(x-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x+y) + \frac{\partial}{\partial z} z = 1 + 1 + 1 = \underline{\underline{3}}$$

Virvlingen (curl):

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-y & x+y & z \end{vmatrix} = \begin{matrix} \left[\frac{\partial}{\partial y} z - \frac{\partial}{\partial z}(x+y)\right]\mathbf{i} & 0\,\mathbf{i} \\ -\left[\frac{\partial}{\partial x} z - \frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right]\mathbf{j} & = 0\,\mathbf{j} \\ +\left[\frac{\partial}{\partial x}(x+y) - \frac{\partial}{\partial y}(x-y)\right]\mathbf{k} & 2\,\mathbf{k} \end{matrix}$$

$$= \underline{\underline{2\,\mathbf{k}}}$$

b)



Gauss sats (divergensteoremet)

$$\int_\tau \nabla \cdot \mathbf{V}\, d\tau = \int_\sigma \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

Volumintegralet av divergensen til vektoren er lik flateintegralet av normalkomponenten av vektoren over flata som begrenser volumet

σ = lukket flate
$d\sigma$ = flateelement
$\mathbf{n}$ = normalvektor
τ = volumet begrenset av σ
$d\tau$ = volumelement.

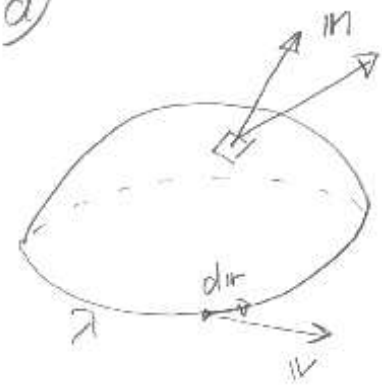
Oppgv. 1 forsatt

c) Bruker Gauss sats til å beregne vektorfluksen gjennom en kuleflate med radius a

$$\int_{\text{kulefl.}} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = \int_{\tau} \nabla\cdot\mathbf{V}\, d\tau = \int_{\tau} 3\, d\tau = 3\tau = \underline{\underline{4\pi a^3}}$$

Volumet av kula $\tau = \frac{4}{3}\pi a^3$

d)



Stokes sats:

$$\int_{\sigma} \nabla\times\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = \oint_{\lambda} \mathbf{V}\cdot d\mathbf{r}$$

Vektorfluksen av virvlingen av vektoren gjennom en flate er lik sirkulasjonen av vektoren omkring kurven som begrenser flata

σ = flate med begrensningskurve λ

$d\sigma$ = flateelement med normalvektor $\mathbf{n}$

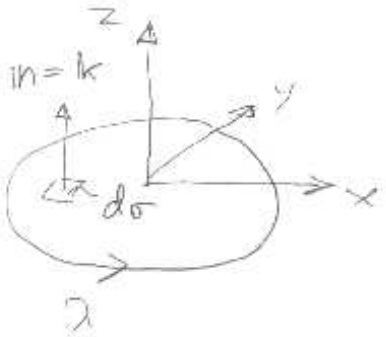
$d\mathbf{r}$ = vektoriell bueelement langs kurven λ.

Stokes sats gjelder også i samme form, for en plan flate, men kalles da ofte Greens sats.

Oppgv. 1 fortsatt

e) Sirkulasjon om en lukket kurve med lengde L. Bruker Stokes sats

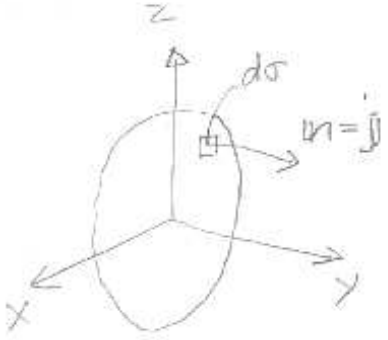
1) Kurven ligger i xy-planet



$$\int_{\lambda(L)} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{\sigma} \nabla \times \vec{v} \cdot \vec{k}\, d\sigma = 2\int_{\sigma} \vec{k} \cdot \vec{k}\, d\sigma$$

$$= 2A$$

2) Kurven ligger i xz-planet



$$\int_{\lambda(L)} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{\sigma} \nabla \times \vec{v} \cdot \vec{j}\, d\sigma = \int_{\sigma} 0\, \vec{j} \cdot \vec{j}\, d\sigma$$

$$= 0$$

Oppgave 2

Varmestrømmen per flateenhet og tidsenhet:

$$\vec{H} = \rho c T \vec{v} - k \nabla T$$

ρ = massetetthet enhet kg/m^3

C = spesifik varmekapasitet " $Joule/kg\,K$

T = absolutt temperatur " K (Kelvin)

$\mathbb{V}$ = strømvektor " m/s

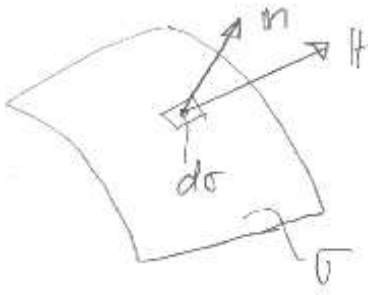
k = varmeledningstall " $Joule/m\,s\,K$

∇T = temperaturgradienten " K/m

$\rho c T \mathbb{V}$ = varmetransport med væskestrømmen (konvektiv transport) Enhet: $Joule/m^2 s$

$-k \nabla T$ = varmetransport ved ledning (Fouriers lov) Enhet: $Joule/m^2 s$
Minustegnet angir positiv varmestrøm fra varmt til kaldt område.

Den totale varmetransporten gjennom en flate σ er gitt ved integralet

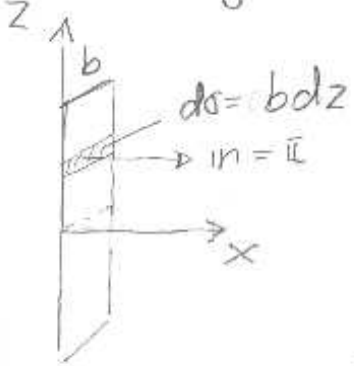


$$\int_\sigma \mathbb{H} \cdot n \, d\sigma$$

Oppgv. 2 forsatt

b) Varmestrømmen i væsken gjennom en snittflate normalt x-aksen

$$\int_\sigma \vec{H}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \int (\rho c T \vec{v} - k\nabla T)\cdot\vec{i}\,d\sigma$$



$$= \int_\sigma \rho c T v_x\,d\sigma - \underbrace{\int_\sigma k\frac{\partial T}{\partial x}\,d\sigma}_{=0 \text{ p.g.a } \frac{\partial T}{\partial x}=0}$$

$$= \rho c \int_{-h}^{+h} T_0\left(2-\frac{z}{h}\right) u_0\left(1-\left(\frac{z}{h}\right)^2\right) b\,dz$$

$$= \rho c u_0 T_0 b \int_{-h}^{+h}\left(2-\frac{z}{h}\right)\left(1-\left(\frac{z}{h}\right)^2\right) dz$$

$$= \underline{\underline{\frac{8}{3}\rho c u_0 T_0 b h}}$$

Integralet:

$$\int_{-h}^{+h}\left(2-\frac{z}{h}\right)\left(1-\left(\frac{z}{h}\right)^2\right)dz = \int_{-h}^{+h} 2\,dz - 2\int_{-h}^{+h}\left(\frac{z}{h}\right)^2 dz - \int_{-h}^{+h}\frac{z}{h}\,dz + \int_{-h}^{+h}\left(\frac{z}{h}\right)^3 dz$$

$$= 2\left[z\right]_{-h}^{+h} - \frac{2}{3h^2}\left[z^3\right]_{-h}^{+h} - \frac{1}{2h}\left[z^2\right]_{-h}^{+h} + \frac{1}{4h^3}\left[z^4\right]_{-h}^{+h}$$

$$= 4h - \frac{4}{3}h = \underline{\underline{\frac{8}{3}h}}$$

Oppgv. 3

a) Skal det finnes en strømfunksjon (feltfunksjon) må $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ og $\mathbf{v}$ være 2-D felt.

Nå er:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-Ax) + \frac{\partial}{\partial y}(Ay)$$

$$= -A + A = \underline{0}$$

Altså finnes det en strømfunksjon ψ slik at

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Finner nå ψ ved å integrere likningene

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = Ax, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = Ay$$

Det gir:

$$\psi = Axy + f_1(x) \qquad \psi = Axy + f_2(y)$$

Entydig ψ dersom vi velger $f_1(x) = f_2(y) = 0$

Altså $\underline{\underline{\psi = Axy}}$

Likningen for strømlinjene er gitt ved

$$\underline{\underline{\psi = Axy = \psi_0 = \text{konstant}}}$$

Strømlinjene $\psi_0 = 0$ gitt ved

$$xy = 0 \quad (\text{for } A = 1)$$

Det gir

1) $x = 0$ y-aksen
2) $y = 0$ x-aksen

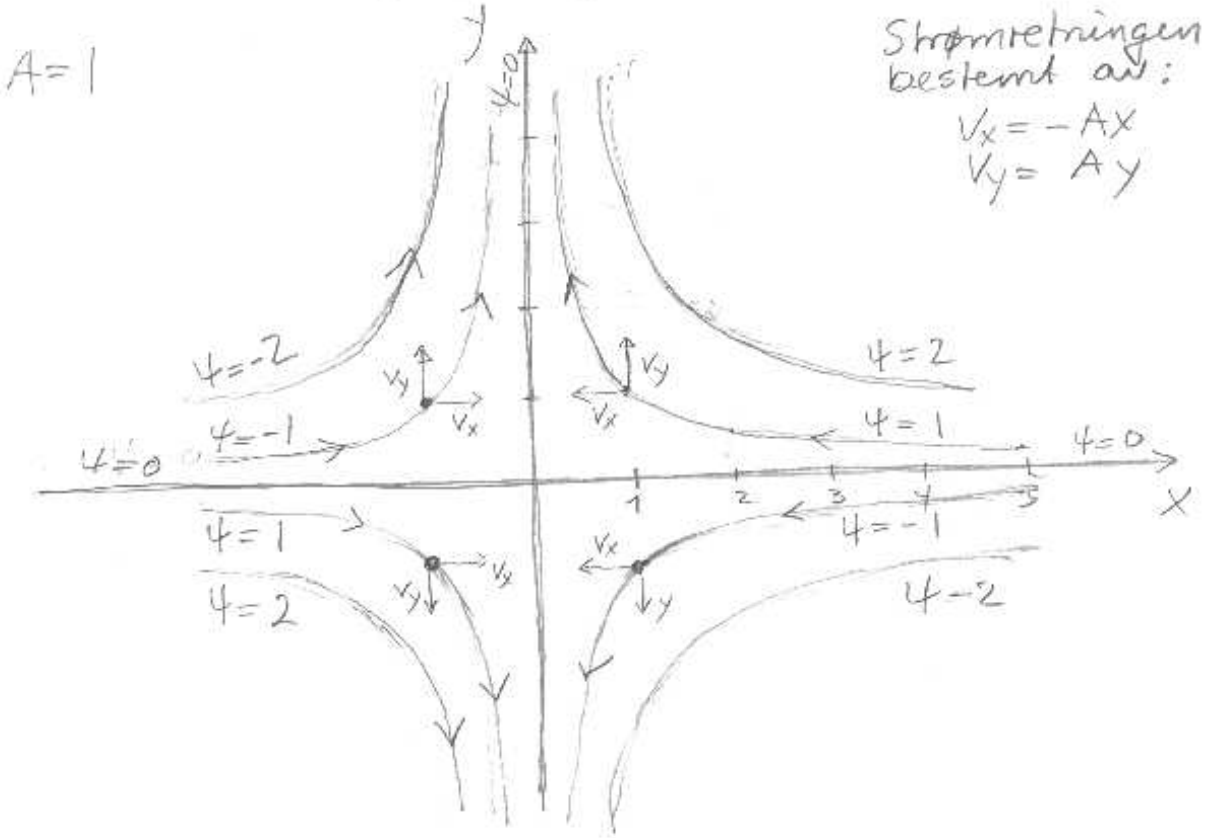
Strømlinjene $\psi_0 = \pm 1$ gitt ved

$$xy = \pm 1 \quad (\text{for } A = 1)$$

$$y = \pm \frac{1}{x} \quad \text{hyperbler}$$

Strømlinjene $\psi_0 = \pm 2$ på tilsvarende måte

$$y = \pm \frac{2}{x} \quad \text{hyperbler}$$



Oppgv 3 fortsatt

b) Skal det finnes en potensialfunksjon må $\nabla \times \mathbf{V} = 0$.

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -Ax & Ay & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(Ay) - \frac{\partial}{\partial y}(-Ax)\right]\mathbf{k}$$

$$= \underline{0}$$

Altså finnes det en potensialfunksjon ϕ gitt ved

$$V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad , \quad V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Finner ϕ ved å integrere likningene

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -Ax \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = Ay$$

Det gir

$$\phi = -\frac{A}{2}x^2 + f_1(y) \qquad \phi = \frac{A}{2}y^2 + f_2(x)$$

Får entydig ϕ når en velger

$$f_1(y) = \frac{A}{2}y^2 \text{ og } f_2(x) = -\frac{A}{2}x^2$$

Det gir

$$\underline{\phi = -\frac{A}{2}(x^2 - y^2)}$$

Oppgv. 3 fortsatt

Feltet kalles stagnasjonsfeltet.

c) Partikkelakselerasjonen er gitt ved:

$$\frac{D\mathbb{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} + \mathbb{V}\cdot\nabla\mathbb{V} = \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} + V_x\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial x} + V_y\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial y}$$

Leddet $\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t}$ er den lokale akselerasjonen

Leddet $\mathbb{V}\cdot\nabla\mathbb{V} = V_x\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial x} + V_y\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial y}$ er den konvektive akselerasjonen

Nå er feltet stasjonært slik at $\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} = 0$ og det er ingen lokal akselerasjon i feltet.

Den konvektive akselerasjonen $\mathbb{V}\cdot\nabla\mathbb{V} =$

$$V_x\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial x} + V_y\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial y} = -A_x\frac{\partial}{\partial x}(-A_x\bar{i} + A_y\bar{j}) + A_y\frac{\partial}{\partial y}(-A_x\bar{i} + A_y\bar{j})$$

$$= A_x^2\bar{i} + A_y^2\bar{j} = A^2(x\bar{i} + y\bar{j}) = A^2\mathbb{r}$$

Den konvektive akselerasjon er overalt rettet radiell utover fra origo