UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.
Eksamensdag:	Torsdag 11 desember 2008.
Tid for eksamen:	14:30 – 17:30.
Oppgavesettet er på 7 sider.	
Vedlegg:	Formeltillegg på 2 sider.
Tillatte hjelpemidler:	K. Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (vekt 16%)

Et strømfelt i (x, y)-planet er gitt ved $\mathbf{v} = (y + x)\mathbf{i} + (y^2 - x)\mathbf{j}$.

1a (vekt 10%)

Bruk Stokes sats til å finne sirkulasjonen $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ langs en sirkel om origo med radius r.

Løsning. Først regner vi ut virvlingen

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = (-1 - 1)\mathbf{k} = -2\mathbf{k}$$

Bruk av Stokes sats (flaten ligger i xy-planet og har normal $\mathbf{k}$)

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_\sigma \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_\sigma (-2\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} d\sigma = -2 \int_\sigma d\sigma$$

Det siste integralet blir arealet av flaten. Siden denne er en sirkel med radius r er arealet πr^2 og sirkulasjonen blir

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = -2\pi r^2$$

1b (vekt 6%)

Hva blir sirkulasjonen dersom vi flytter sirkelen slik at sentrum ligger i $(a, 0)$?

Løsning. Siden $\nabla \times \mathbf{v}$ er konstant lik $-2\mathbf{k}$ vil flateintegralet i Stokes sats alltid gi $-2\times$(areal av flaten). Det spiller ingen rolle om vi flytter sirkelen, siden både virvling og areal av flate forblir de samme. Altså, samme svar som punkt a.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2 (vekt 34%)

Et hastighetspotensial er gitt ved $\phi(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

2a (vekt 10%)

Vis at

$$\nabla^2\phi = 0,$$

og forklar hvorfor det finnes en strømfunksjon.

Løsning. Utregning gir

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0$$

Hastigheten er $\mathbf{v} = \nabla\phi$. Da følger at

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi = 0$$

Altså er $\mathbf{v}$ divergensfri overalt og det eksisterer en strømfunksjon.

2b (vekt 10%)

Finn hastigheten og strømfunksjonen.

Løsning.

$$\mathbf{v} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} = 3(x^2 - y^2)\mathbf{i} - 6xy\mathbf{j}$$

For å finne strømfunksjonen, ψ, bruker vi først relasjonen mellom v_y og ψ

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = v_y = -6xy \Rightarrow \psi = -3yx^2 + F(y),$$

der F ennå ikke er bestemt og må finnes fra relasjonen mellom v_x og ψ

$$3x^2 - 3y^2 = v_x = -\frac{\partial\psi}{\partial y} = 3x^2 - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}.$$

Hefra følger at $F(y) = y^3 + \text{konstant}$. Konstanten kan vi velge lik null slik at

$$\psi = y^3 - 3x^2y.$$

2c (vekt 10%)

Finn strømmens stagnasjonspunkt og strømlinjene som går gjennom dette.

Løsning. I et stagnasjonspunkt er begge hastighetskomponenetene null, dvs.

$$v_x = 3x^2 - 3y^2 = 0 \tag{1}$$
$$v_y = -6xy = 0 \tag{2}$$
$$\tag{3}$$

Fra den nederste, (2), følger at vi må ha $x = 0$ eller $y = 0$. Den øverste likningen, (1), gir da hhv. $y = 0$ og $x = 0$. Uansett får $x = y = 0$ og bare ett stagnasjonspunkt.

(Fortsettes på side 3.)

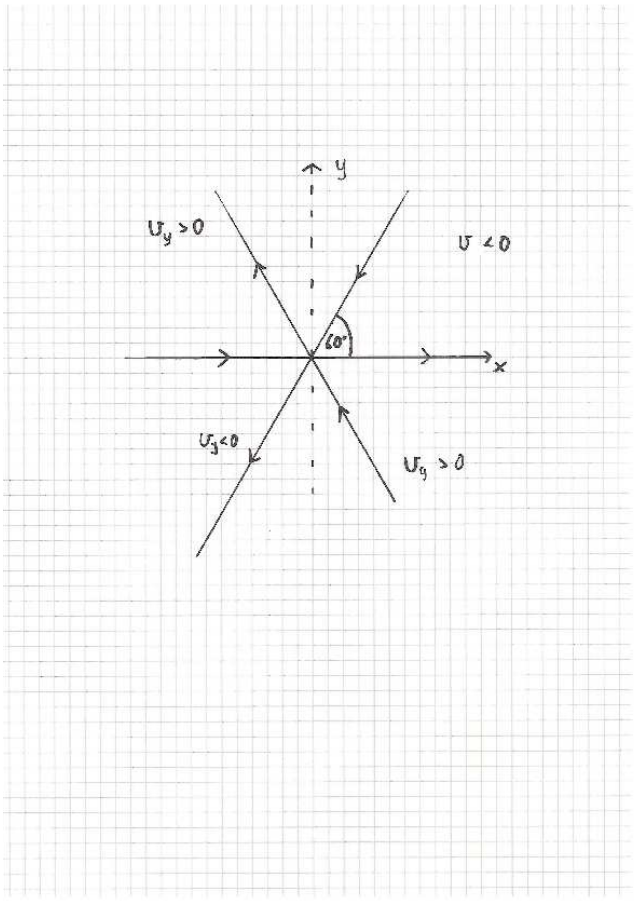


Figure 1: Tegning i 2d

Strømlinjer er gitt ved

$$0 = \psi(0,0) = y^3 - 3x^2y = y(y^2 - 3x^2).$$

Vi har mulighetene $y = 0$, som gir at x-aksen er en strømlinje, og $y^2 - 3x^2 = 0$ som gir strømlinjene $y = \pm\sqrt{3}x$. En kan vise at disse danner vinkler på $\pm 60°$ og $\pm 120°$ med x-aksen (men dette er det ikke spurt etter).

2d (vekt 4%)

Tegn strømlinjene fra forrige oppgavepunkt og angi strømmens retning langs dem.

Løsning. Langs strømlinja $y = 0$ er $\mathbf{v} = 3x^2\mathbf{i}$, dvs. at strømmen peker i positiv x retning. Langs de andre strømlinjene kan vi finne retning ved å se på fortegnet av v_y. Når denne komponenten er positiv strømmer væsken i positiv y retning og i negativ reting ellers. v_y er positiv i andre og fjerde kvadrant og negativ i første og tredje, når vi ser bort fra x-aksen.

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 3 (vekt 20%)

Massefluksen gjennom en flate er gitt ved integralet (skal ikke vises)

$$\int_\sigma \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

3a (vekt 4%)

Vis at massfluksintegralet slik det er gitt ovenfor har riktig benevning.

Løsning. En massefluks er transport av masse pr. tid. Dersom vi holder oss til SI-enheter blir benevningen kg/ s. For faktorene i integralet har vi

Størrelse	enhet	kommentar
ρ	kg/ m^3	tetthet
$\mathbf{v}$	m/ s	hastighet
$\mathbf{n}$	ingen	enhetsvektor uten benevning
$d\sigma$	m^2	et arealelement

Ganger vi sammen

$$\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma \rightarrow \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ m}^2 = \frac{\text{kg}}{\text{s}},$$

som er det vi skal ha.

3b (vekt 16%)

Utled kontinuitetslikningen fra prinsippet om massebevaring.

Løsning. Vi betrakter et vilkårlig fast volum, τ, med overflate σ. Massebevaring medfører da

Tidsendring av masse i volumet = - masseflux ut av volumet

Vi kan også si at den masse som blir borte i volumet tilføres omgivelsene. Uttrykker vi likheten ovenfor i matematikk får vi

$$\int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = -\int_\sigma \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

Forklaring på venstreside: Siden $\rho d\tau$ er massen i et fast volumelement er $\frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$ tidsendringen av masse i elementet. Summeres (integreres) disse over hele volumet får vi integralet til venstre ovenfor.
Bruk av Gauss sats på høyresiden gir så

$$\int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = -\int_\tau \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) d\tau,$$

eller

$$\int_\tau \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) d\tau = 0,$$

(Fortsettes på side 5.)

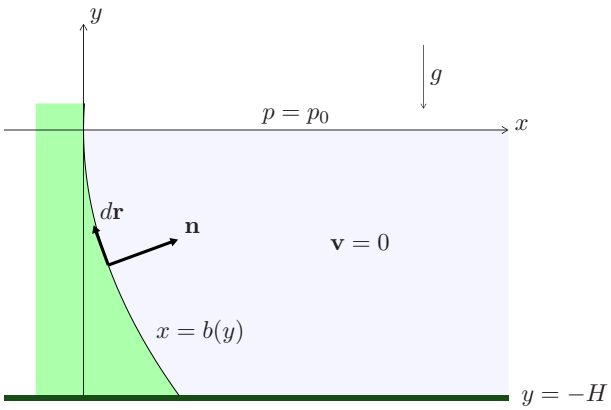


Figure 2: Definisjonsskisse av demning og reservoar.

Siden dette gjelder for alle faste volum må integranden være null. Vi kan feks. dividere på volumet og la τ gå mot null. Da følger kontinuitetslikningen på formen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Her kan vi forsåvidt stoppe, men for å få formen som er gitt i formeltillegget bruker vi en først en produktregel (fra formelarket)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

De første to leddene trekkes så sammen til en partikkel/individuelt/materielt derivert og det andre flyttes til høyresiden. Derved

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Oppgave 4 (vekt 30%)

Et vannreservoar er begrenset av en demning som har en profil gitt ved $x = b(y)$, der y aksen peker vertikalt oppover slik at tyngdekraft pr. masseenhet er gitt ved $\mathbf{g} = -g\mathbf{j}$. Væsken er homogen og inkompressibel, med tetthet ρ. En skisse er gitt i figur 2. Vi antar at forholdene er konstante normalt på papirplanet og vil, etterhvert, regne ut kraft på demning pr. breddeenhet. I reservoaret er væsken i likevekt, dvs. $\mathbf{v} = 0$, og trykket på overflaten er p_0.

4a (vekt 10%)

Bruk Eulers bevegelseslikning til å vise at trykket i væsken er

$$p = p_0 - \rho g y.$$

Løsning. Når y aksen er rettet normalt oppover blir tyngdens akselerasjon $\mathbf{g} = -g\mathbf{j}$. Bevegelseslikningen kan da skrives

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\mathbf{j}.$$

(Fortsettes på side 6.)

Når vi regner likevekt og uniforme forhold på tvers av xy-planet er $p = p(x, y)$ og akselerasjonen null. Vi kan da gange opp med ρ og dekomponere bevegelseslikningen

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial p}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \end{aligned}$$

Den nederste gir ved integrasjon $p = C(x) - \rho g y$. Innsetting i den øverste gir så at $C(x) = C$ er konstant. Ved overlaten har vi gitt at $p = p_0$. Setter vi dette inn i uttrykket for p får vi $C = p_0$ og

$$p = p_0 - \rho g y$$

4b (vekt 10%)

Trykkraften, pr. breddeenhet, på et lite profilelement $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}$ (se figur) er gitt ved $-p\mathbf{n}|d\mathbf{r}|$ (skal ikke vises). Vis at trykkraften (pr. breddeenhet) for hele profilet blir

$$\int_\lambda -p(dy\mathbf{i} - dx\mathbf{j}),$$

der λ er kurven gitt ved $x = b(y)$.

Løsning. Vi må først vise at trykkraften på profilelementet oppfyller $-p(dy\mathbf{i} - dx\mathbf{j}) = -p\mathbf{n}|d\mathbf{r}|$, dvs. $\mathbf{n}|d\mathbf{r}| = (dy\mathbf{i} - dx\mathbf{j})$.

- Det letteste er kanskje å bruke kryssproduktet. Vi lar $\mathbf{k}$ være rettet ut av xy-planet slik at vi får et høyresystem av $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$, dvs. at $\mathbf{k}$ peker mot oss på figuren. Høyrehåndsregelen gir da at $-\mathbf{k} \times d\mathbf{r}$ er rettet fra demning og inn i væska, i tillegg til å være normal på $d\mathbf{r}$, dvs. parallel med $\mathbf{n}$. Siden $\mathbf{k} \perp d\mathbf{r}$ har vi $|-\mathbf{k} \times d\mathbf{r}| = |\mathbf{k}||d\mathbf{r}| = |d\mathbf{r}|$. Altså har $-\mathbf{k} \times d\mathbf{r}$ riktig retning og absoluttverdi. Utregning gir

  $$-\mathbf{k} \times d\mathbf{r} = -\mathbf{k} \times (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = -dx\mathbf{j} + dy\mathbf{i},$$

  som var det vi skulle vise.
  Kommentar: faktisk er denne måten beslektet med å parameterisere demningen vha. y og z slik at $\mathbf{r}_3 = b(y)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. En normal er da gitt ved $\frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial z} \times \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial y} = \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$ og så må lengden tilpasses slik som i neste alternativ.

- Alternativt kan vi definere profilen som $x - b(y) = 0$, dvs. som en nivåflate for $G(x, y) = x - b(y)$. En enhetsnormal er da gitt ved

  $$\frac{\nabla G}{|\nabla G|} = \frac{\mathbf{i} - b'\mathbf{j}}{\sqrt{1 + (b')^2}}$$

  Fra fortegnet på $\mathbf{i}$-komponent ser vi at den har rett retning. Så må vi gange med

  $$|d\mathbf{r}| = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} dy\right| = |b'\mathbf{i} + \mathbf{j}|dy = \sqrt{1 + (b')^2}dy$$

  der dy er positiv. Når vi identifiserer $b'(y)dy = dx$ får vi uttrykket vi søker.

(Fortsettes på side 7.)

For å finne den totale kraften må bidragene summeres, hvilket betyr at $-p(dy\mathbf{i} - dx\mathbf{j})$ må integreres over λ.

4c (vekt 10%)

Finn den totale trykkraften på profilet fra bunnen ($x = b(-H)$, $y = -H$) til overflaten ($x = y = 0$) når $b(y) = \alpha y^2$ der α er konstant.

Løsning. For den totale trykk-kraften på profilet skriver vi

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} = \int_\lambda -p(dy\mathbf{i} - dx\mathbf{j}) = -\mathbf{i}\int_\lambda pdy + \mathbf{j}\int_\lambda pdx$$

Komponentene regner vi så ut hver for seg

$$\begin{aligned} F_x &= -\int_\lambda p(y)dy = -\int_{-H}^{0}(p_0 - \rho g y)dy \\ &= -\left[p_0 y - \tfrac{1}{2}\rho g y^2\right]_{-H}^{0} \\ &= -p_0 H - \tfrac{1}{2}\rho g H^2, \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} F_y &= \int_\lambda p(y)dx = \int_\lambda p(y)\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}dy \\ &= \int_{-H}^{0}(p_0 - \rho g y)b'(y)dy = \int_{-H}^{0}(p_0 - \rho g y)2\alpha y dy = \\ &= \left[\alpha(p_0 y^2 - \tfrac{2}{3}\rho g y^3)\right]_{-H}^{0} \\ &= -\alpha\left(p_0 H^2 + \tfrac{2}{3}\rho g H^3\right) \end{aligned}$$

— *Slutt* —