UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.
Eksamensdag:	Fredag 29 mai 2009.
Tid for eksamen:	14:30 – 17:30.
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	Formeltillegg på 2 sider.
Tillatte hjelpemidler:	K. Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (vekt 24%)

1a (vekt 12%)

Et todimensjonalt hastighetsfelt er gitt som

$$\mathbf{v} = u_0 e^{kx}(\sin(ky)\mathbf{i} + \cos(ky)\mathbf{j}),$$

der k og u_0 er konstanter. Regn ut divergensen til $\mathbf{v}$ og avgjør om det eksisterer en strømfunksjon. Finn strømfunksjonen dersom den eksisterer.
Løsning

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = u_0 k e^{kx}\sin(ky) - u_0 k e^{kx}\sin(ky) = 0.$$

Strømningen er todimensjonal og divergensfri overalt. Da eksisterer det en strømfunksjon ψ slik at

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_y = u_0 e^{kx}\cos(ky), \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -v_x = -u_0 e^{kx}\sin(ky).$$

Antiderivasjon av den første gir

$$\psi = \frac{u_0}{k} e^{kx}\cos(ky) + F(y),$$

der $F(y)$ er en (ennå) ubestemt funksjon av y. Innsetting i relasjonen mellom ψ og v_x gir

$$-u_0 e^{kx}\sin(ky) = -v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -u_0 e^{kx}\sin(ky) + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}.$$

Denne er oppfylt dersom $F = C$=konstant og

$$\psi = \frac{u_0}{k} e^{kx}\cos(ky) + C.$$

Merknad: I prinsippet er det nok å finne ψ; klarer vi det er det samtidig vist at den eksisterer. Likevel bør en regne ut divergensen først.

(Fortsettes på side 2.)

1b (vekt 12%)

Et strømfelt er gitt ved

$$\mathbf{v} = A\left[\,(x^3 - 3axy^2)\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j}\,\right],$$

der A er en gitt konstant. Bestem konstanten a og hastighetskomponenten v_y slik at det eksisterer både en strømfunksjon og et hastighetspotensial.
Løsning
Først: i denne oppgaven er v_y definert på en litt rar måte siden A er trukket utenfor hakeparaneser som omslutter også v_y. y komponenen av hastigheten er altså Av_y. Tilsvarende definerer vi x-komponenten som Av_x. Dersom det skal eksistere en strømfunksjon må hastigheten være både divergens- og virvelfri. Dette gir to likninger

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{\partial v_x}{\partial x} &&= -3x^2 + 3ay^2 \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} &= \frac{\partial v_x}{\partial y} &&= -6axy \end{aligned} \tag{1}$$

Den nederste (krav om null virvling) gir da

$$v_y = -3ax^2y + F(y),$$

der F er ubestemt. Dette innsatt i den øvre (krav om divergensfrihet) gir

$$-3x^2 + 3ay^2 = \frac{\partial v_y}{\partial y} = -3ax^2 + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}.$$

Skal denne likheten være oppfylt må $a = 1$ og $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y} = 3ay^2 = 3y^2$. Integrasjon av uttrykket for F gir så

$$v_y = (y^3 - 3x^2y) + C,$$

der C er en fritt valgbar konstant.
Merknad: Dersom både hastighetspotensial og strømpotensial eksisterer er potensialene løsninger av Laplace-likningen. Da må også $v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ oppfylle $\nabla^2 v_x = 0$. Dette kan brukes til å bestemme a først. At v_x er Laplaceisk følger også fra (1) dersom en kryssderiverer for å eliminere v_y.

Oppgave 2 (vekt 20%)

En flate, σ, er parameterisert ved x og y slik at

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + cxy\mathbf{k},$$

der $0 < x < a$ og $0 < y < b$. Et hastighetsfelt er gitt ved

$$\mathbf{v} = \alpha x\mathbf{i} + \alpha y\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}.$$

(Fortsettes på side 3.)

2a (vekt 4%)

Parameterisering og hastighetsfelt er gitt med benevninger. Finn benevningen på konstantene c, α og γ.
Løsning: Alle ledd på høyresiden i uttryket for $\mathbf{r}$ må ha benevning lengde. Det har også x, y og z. Tilsvarende må alle ledd i uttrykket for $\mathbf{v}$ ha benevning lengde per tid. Bruker vi SI enheter får vi da

konstant	benevning
c	1/m
α	1/s
γ	m/s

2b (vekt 16%)

Beregn fluksen

$$\int_\sigma \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma,$$

der fortegnet på $\mathbf{n}$ er valgt slik at $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}>0$. Vis at svaret har riktig benevning.
Løsning: Vi regner først ut tangentene fra parameteriseringen

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}=\mathbf{i}+cy\mathbf{k},\quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}=\mathbf{j}+cx\mathbf{k},$$

og deretter

$$\mathbf{n}d\sigma=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\,dx\,dy=(\mathbf{k}-cy\mathbf{i}-cx\mathbf{j})\,dx\,dy.$$

Denne har riktig fortegn fordi $\mathbf{n}d\sigma\cdot\mathbf{k}=dx\,dy>0$. Integralet blir da

$$\begin{aligned}\int_\sigma \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma &= \int_0^b\int_0^a \mathbf{v}\cdot(\mathbf{k}-cy\mathbf{i}-cx\mathbf{j})\,dx\,dy\\ &= \int_0^b\int_0^a(\gamma-2c\alpha xy)\,dx\,dy\\ &= \gamma ab-\tfrac{1}{2}c\alpha a^2b^2\end{aligned}$$

Fluks av volum skal ha beneving m^3/s, altså volum per tid. For de to leddene i svaret ser vi

$$\gamma ab\sim\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{m}=\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}},$$

og

$$c\alpha a^2b^2\sim\frac{1}{\mathrm{m}}\cdot\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{m}^2=\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}},$$

Oppgave 3 (vekt 20%)

For et fast stoff kan vi se bort fra konvektiv (advektiv) varmestranport ($\mathbf{H}_s=0$) slik at varme bare transporteres ved ledning. Videre antar vi at det ikke er varmekilder ($q=0$) og at energitettheten pr. masse kan skrives $E=cT$, der c (varmekapasiteten) er konstant. Dette betyr at innholdet av

(Fortsettes på side 4.)

termisk energi i et volumelement $d\tau$ er $\rho c T d\tau$, der ρ er massetettheten til det faste stoffet. Utled varmeledningslikningen for dette forenklede tilfellet.
Løsning
Bevaring av energi (termodynamikkens første hovedsetning) anvendt på et fast volum τ gir

Endring per tid av energi i volumet = - (energistrøm ut av volumet per tid)

Energiinnholdet i τ finner vi ved å integrere energitettheten

$$\int_\tau \rho c T d\tau.$$

Fordi volumet ikke endrer seg i tiden, og ρ og c er konstante, følger

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \rho c T d\tau = \int_\tau \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\tau.$$

Siden vi bare har transport på grunn av ledning blir energistrøm per tid ut av volumet

$$\int_\sigma \mathbf{H}_l \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_\sigma -k\nabla T \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

der σ er flaten som omslutter τ, $\mathbf{n}$ er utadpekende enhetsnormal og vi har satt inn for $\mathbf{H}_l$ fra formelarkene. Bevaring av energi gir da

$$\int_\tau \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\tau = -\int_\sigma -k\nabla T \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_\sigma k\nabla T \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

Bruk av Gauss sats på høyresiden gir

$$\int_\tau \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\tau = \int_\tau \nabla \cdot (k\nabla T)\, d\tau,$$

som ved flytting av det ene leddet fører til

$$\int_\tau \left\{ \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k\nabla T) \right\} d\tau = 0.$$

Når dette skal gjelde for *alle* volum τ følger at integranden må være null i alle punkter. Dvs.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k\nabla T)\,,$$

eller dersom vi antar at k er konstant

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c}\nabla^2 T.$$

Denne svarer til likningen i formeltillegget når vi sløyfer det konvektive leddet og setter $q = 0$.

Oppgave 4 (vekt 36%)

Vi har en todimensjonal strømning i en inkompressibel og friksjonsfri væske. I polarkoordinater er en punktkilde gitt ved hastighetspotensialet

$$\phi = A \ln\left(\frac{r}{R}\right),$$

der r er avstanden til origo og A og R er positive konstanter.

(Fortsettes på side 5.)

4a (vekt 12%)

Angi hva slags benevning A og R må ha og finn hastighetsvektoren. Finn også den totale volumutstrømningen fra kilden.
Løsning:
Siden vi har feks. $\frac{\partial \phi}{\partial x} = v_x$ må benevningen til ϕ delt på lengde gi lengde per tid. Dvs. at benevningen til hastighetspotensialet er $\phi \sim \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$. Siden logaritmen ikke har benevning må A ha samme benevning som ϕ, dvs. $A \sim \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$. Logaritmen kan bare regnes ut for dimensjonsløse tall derfor må r/R være dimensjonsløs, noe som gir $R \sim \mathrm{m}$.
Hastigheten blir

$$\mathbf{v} = \nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}\mathbf{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\mathbf{i}_\theta = \frac{A}{r}\mathbf{i}_r.$$

Vi merker oss at R forsvinner i derivasjonen. Den totale utstrømningen er gitt ved

$$Q = \oint_\lambda \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds,$$

der λ er en kurve som omslutter origo. Siden $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, untatt i origo, blir resultatet det samme for enhver kurve λ som omslutter origo. Vi kan da enkelt regne ut Q ved å la λ være en sirkel med radius a. Da er $\mathbf{n} = \mathbf{i}_r$ og $ds = ad\theta$ slik at

$$Q = \oint_\lambda \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \int_0^{2\pi} \frac{A}{a} a d\theta = 2\pi A$$

4b (vekt 12%)

Finn trykket i væska når trykket uendelig langt borte fra punktkilden ($r \to \infty$) er lik p_∞. Bestem den minste verdien av r (uttrykt ved p_∞, A etc.) der strømningstilstanden (hastighet og trykk) kan være fysisk meningsfull.
Løsning
Trykket kan vi finne enten fra Eulers bevegelseslikning eller Bernoullis trykklikning. For å bruke den første må vi regne ut den konvektive akselerasjonen, sette den inn i likningen og integrere opp. Siden vi må gå veien om kartesiske koordinater fører dette til mye regning. Bernoullis likning kan brukes langs strømlinjer. Her kan vi bruke den for å finne trykket i hele feltet fordi vi har et veldig enkelt strømlinjemønster. For en punktkilde er strømlinjene rette linjer som går gjennom origo. Langs hver linje vil hastigheten og trykket variere med r, avstanden til origo. Siden vi har symmetri omkring origo vil denne variasjonen være den samme langs alle strømlinjer og p vil være en funksjon av r som kan bestemmes ved å bruke Bernoullis likning langs en vilkårlig strømlinje:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 = C = \text{konstant}$$

Setter vi inn for hastigheten og ordner likningen følger

$$p = \rho C - \frac{\rho A^2}{2r^2}.$$

lar vi $r \to \infty$ går siste ledd (det fra hastigheten) mot null og

$$p_\infty = \rho C,$$

(Fortsettes på side 6.)

som gir

$$p = p_\infty - \frac{\rho A^2}{2r^2}.$$

Vi ser at trykket faller inn mot origo og at det faller raskere jo nærmere vi kommer $r = 0$. For en verdi av $r = r_m$ vil trykket skifte fortegn til å bli negativt, noe som ikke er fysisk mulig. Da er $r > r_m$ et krav for at vår løsning kan ha mening. r_m finnes fra

$$0 = p_\infty - \frac{\rho A^2}{2r_m^2},$$

som gir

$$r_m = A\sqrt{\frac{\rho}{2p_\infty}}.$$

I en virkelig væske er vanndamptrykket > 0, noe som betyr at væsken begynner å koke for en r som er (litt) større enn r_m. Da brytes forutsetningen for Bernoullis likning. Siden vi ikke har oppgitt vanndamptrykket nøyer vi oss med å angi r_m som en nedre begrensning av de r der strømningen kan være fysisk mulig.

4c (vekt 12%)

Vi betrakter en væskepartikkel som ved $t = 0$ befinner seg i posisjonen som svarer til $r = r_0$ og $\theta = \theta_0$. Finn posisjonen av denne partikkelen for $t > 0$.
Løsning
Partikkelen beveger seg utover strømlinjen med hastigheten $\mathbf{v} = v_r(r)\mathbf{i}_r$. Dersom vi lar r være partikkelens avstand fra origo beveger den seg utover med farten A/r og vi har

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v_r(r) = \frac{A}{r}.$$

Dette er en separabel likning som omskrives til

$$r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = A,$$

og som integreres til

$$\frac{1}{2}r^2 = At + D,$$

der D er en konstant. Initialbetingelsen $r(0) = r_0$ gir $D = \frac{1}{2}r_0^2$ og

$$r = \sqrt{r_0^2 + 2At}.$$

Siden hastigheten er rettet radielt utover langs strømlinjen endrer ikke θ seg, dvs. $\theta(t) = \theta_0$ =konstant.

— *Slutt* —