UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.
Eksamensdag:	Torsdag 10 desember 2009.
Tid for eksamen:	14:30 – 17:30.
Oppgavesettet er på 7 sider.	
Vedlegg:	Formeltillegg på 2 sider.
Tillatte hjelpemidler:	K. Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (vekt 50%)

1a (vekt 10%)

Et todimensjonalt hastighetspotensial er gitt ved

$$\phi = a(x^4 - 6x^2y^2 + y^4),$$

der a er en konstant. Avgjør om ϕ er Laplaceisk og angi hva slags benevning a må ha.

Løsning. Et Laplaceisk felt oppfyller Laplace-likningen

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = a(12x^2 - 12y^2) + a(-12x^2 + 12y^2) = 0$$

Siden $\nabla\phi$ er hastighet har deriverte av ϕ mhp. x eller y benevning $\mathrm{m/s}$. Da har ϕ benevning $\mathrm{m^2/s}$. Det samme må ax^4 ha. Derved har a benevning $1/(\mathrm{m^2\,s})$.

1b (vekt 10%)

Bestem strømfunksjonen. Finn også hastigheten og stagnasjonspunktet (punktet der hastighetsvektoren er null). Det er gitt at det er bare ett stagnasjonspunkt i denne strømmen.

Løsning.

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} = \nabla\phi = a(4x^3 - 12xy^2)\mathbf{i} + a(-12x^2y + 4y^3)\mathbf{j}.$$

Strømfunksjonen finnes fra

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x} &= v_y &&= a(-12x^2y + 4y^3) \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= -v_x &&= -a(4x^3 - 12xy^2) \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 2.)

Den øverste gir ved antiderivasjon

$$\psi = a(4xy^3 - 4x^3y) + F(y),$$

som innsatt i relasjonen mellom ψ og v_x gir

$$-v_x = -a(4x^3 - 12xy^2) = \frac{\partial \psi}{\partial y} = a(12xy^2 - 4x^3) + F'(y).$$

Nå følger at F er en konstant, som vi kan velge lik null og

$$\psi = 4a(xy^3 - x^3y).$$

Stagnasjonspunkt er bestemt ved (trekker ut felles faktorer)

$$\begin{aligned} 0 &= v_x = 4ax(x^2 - 3y^2), \\ 0 &= v_y = 4ay(y^2 - 3x^2). \end{aligned}$$

Vi ser umiddelbart at $x = y = 0$ er et stagnasjonspunkt. Dette er svar nok på oppgaven siden det er oppgitt at det er bare ett slikt punkt. Her vil vi likevel vise at det ikke er andre stagnasjonspunkter. Er $x \neq 0$ må $x^2 - 3y^2 = 0$ dvs. $x = \pm\sqrt{3}y$. Er $y = 0$ gjenfinner vi bare origo som stagnasjonspunkt. For å finne et nytt punkt må både x og y være ulik null. Vi får da $x = \pm\sqrt{3}y$ og $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}y$. Disse kan ikke begge være oppfylt mens $x \neq 0$ og $y \neq 0$.

1c (vekt 10%)

Vis at x-aksen er en strømlinje og finn strømlinjene som går gjennom stagnasjonspunktet på en form der y er eksplisitt uttrykt som funksjon av x, eller omvendt.

Løsning. Vi kan skrive

$$\psi = 4axy(y^2 - x^2).$$

Insetting viser $\psi(x, 0) = 0$, dvs. at ψ er konstant på x-aksen og denne er da en strømlinje. Denne strømlinja går gjennom stagnasjonspunktet i origo. Andre strømlinjer gjennom origo finner vi fra $\psi = 0$ som medfører

- $y = 0$: Dette er x-aksen som er funnet tidligere.
- $x = 0$: Dette er y-aksen.
- $y^2 - x^2 = 0$: Dette gir to strømlinjer som kan skrives hhv. $y = x$ og $y = -x$.

1d (vekt 10%)

Sett trykket i origo lik p_0, anta at det ikke er noen tyngde eller annen ytre volumkraft, og finn trykket langs x-aksen. For hvilke verdier av x gir dette trykket fysisk mening?

(Fortsettes på side 3.)

Løsning. Fordi x-aksen er en strømlinje kan vi bruke Bernoullis trykklikning langs den. Uten ytre krefter får vi da

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{v}(x,0)^2 = C = \text{konstant}.$$

I origo har vi et stagnasjonspunkt, dvs. $\mathbf{v} = 0$, noe som gir

$$\frac{p_0}{\rho} = C.$$

Insetting av $\mathbf{v}(x,0) = 4ax^3\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$ i Bernoullis likning gir da

$$p = p_0 - 8\rho a^2 x^6.$$

Vi ser at p avtar ut fra origo langs x-aksen. p må ikke bli negativ, dvs.

$$p_0 - 8\rho a^2 x^6 \geq 0,$$

som gir

$$|x| \leq \left(\frac{p_0}{8\rho a^2}\right)^{\frac{1}{6}}.$$

Egentlig vil p nå vanndamptrykket litt før p blir null, noe som gir en litt mindre $|x|$ enn den gitt ovenfor. Når p vanndamptrykket får vi faseoverganger i væsken (koking) og antagelsene bak Bernoullis likning brytes.

1e (vekt 10%)

Vi betrakter akselerasjonen til væskepartiklene som følger x-aksen. Forklar hvorfor **j**-komponenten av akselerasjonen er null og bestem **i**-komponenten som funksjon av x. (Det spørres *ikke* om akselerasjonen i hele feltet.)

Løsning. Siden x aksen er en strømlinje vi partiklene der bare ha en hastighet i **i** retning. Da må også akselerasjonen våre rettet i **i** retning. Fordi strømmen er stasjonær og $v_y(x,0) = 0$ gir da formler fra vedlegget

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}(x,0)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{D}u(x,0)}{\mathrm{d}t}\mathbf{i} = (\mathbf{v}(x,0)\cdot\nabla v_x(x,0))\mathbf{i} = v_x(x,0)\frac{\partial v_x(x,0)}{\partial x}\mathbf{i}.$$

Setter vi inn

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 12ax^2,$$

får vi

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}(x,0)}{\mathrm{d}t} = 48a^2x^5\mathbf{i}.$$

Alternativ
Vi vet at langs x-aksen har vi bare akselerasjon i **i** retning. Denne kan vi finne fra bevegelseslikningen (uten ytre volumkrefter)

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p.$$

I x-komponenten av denne kan vi sette inn trykket fra forrige delpunkt

$$\frac{\mathrm{D}u(x,0)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p(x,0)}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(p_0 - 8\rho a^2x^6\right) = 48a^2x^5.$$

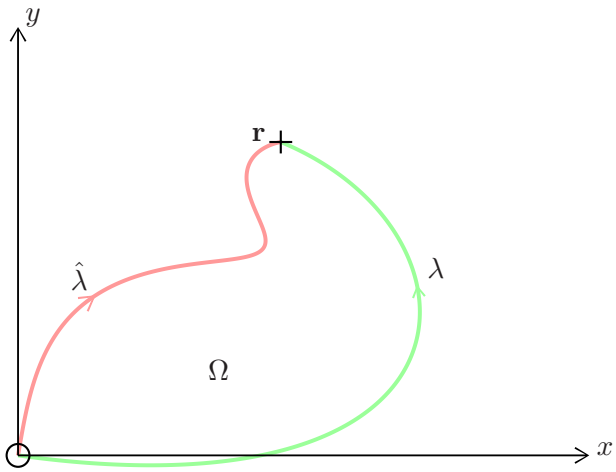
(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 2 (vekt 10%)

Et hastighetsfelt, $\mathbf{v}$, er virvelfritt i hele rommet. Vi definerer et hastighetspotensial ved

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r},$$

der λ er en kurve som starter i origo og slutter i $\mathbf{r}$. Vis at definisjonen av ϕ er entydig i den forstand at valget av λ ikke påvirker verdien av ϕ så lenge kurven starter i origo og ender i $\mathbf{r}$. (hint: bruk Stokes sats)



Løsning.
Vi må vise at vi får samme resultat for $\phi(\mathbf{r})$ om vi integrerer langs en (vilkårlig) annen kurve, $\hat{\lambda}$. Se figuren over. Dette betyr

$$\int_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\hat{\lambda}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

Dersom vi går fra origo til $\mathbf{r}$ langs λ og tilbake fra $\mathbf{r}$ til origo langs $\hat{\lambda}$ får vi en lukket kurve C. Fordi C går langs λ og deretter motsatt av $\hat{\lambda}$ er sikulasjonen av $\mathbf{v}$ langs C gitt som

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\hat{\lambda}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}. \quad (*)$$

For denne lukkede kurven bruker vi Stokes sats

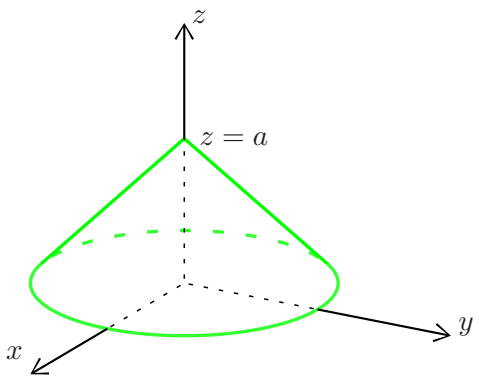
$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\sigma} \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma,$$

der σ er en vilkårlig flate med C som rand. Uansett blir flateintegralet null fordi virvlingen er null. Setter vi så inn fra (*) i Stokes sats får vi

$$\int_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\hat{\lambda}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

og vi har vist at ϕ definert som et kurveintegral ikke avhenger av integrasjonsveien.

(Fortsettes på side 5.)



Definisjonsskisse av kjegleflaten σ_K.

Oppgave 3 (vekt 40%)

Vi lar x, y og z betegne et sett av kartesiske koordinater i rommet, mens $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, θ og z er sylinderkoordinater for det samme rommet. Det er definert to flater:

σ_K: Dette er en kjegleflate definert ved

$$z = a - r, \quad 0 \leq z \leq a,$$

der a er en konstant.

σ_0: Denne flaten ligger i xy-planet og er begrenset ved

$$x^2 + y^2 \leq a^2,$$

der a er samme konstant som i definisjon av σ_K.

Vi har også gitt et hastighetsfelt i sylinderkoordinater

$$\mathbf{v} = A\left\{r\mathbf{i}_r + r\mathbf{i}_\theta + (z+b)\mathbf{k}\right\},$$

der A og b er konstanter.

3a (vekt 10%)

Finn uttrykket for hastighetsfeltet i kartesiske koordinater (x, y og z) og med kartesiske enhetsvektorer ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$). Beregn divergensen.

Løsning. Vi bruker formler fra vedlegget og transformerer hastigheten bitvis

$$r\mathbf{i}_r = r(\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}) = r\cos\theta\mathbf{i} + r\sin\theta\mathbf{j} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Vi kunne også bare sett at $r\mathbf{i}_r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.
Videre

$$r\mathbf{i}_\theta = r(-\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}) = -r\sin\theta\mathbf{i} + r\cos\theta\mathbf{j} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

Tilsammen gir dette

$$\mathbf{v} = A\left\{(x-y)\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j} + (z+b)\mathbf{k}\right\}.$$

(Fortsettes på side 6.)

Divergensen blir

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = A(2+0+1) = 3A,$$

eller

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = A(1+1+1) = 3A.$$

3b (vekt 10%)

Regn ut volumfluksen gjennom σ_0

$$Q_0 = \int_{\sigma_0} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

der $\mathbf{n}$ skal ha en positiv z-komponent. Bestem benevningen på A , a og b og sjekk at Q_0 har rett benevning.

Løsning. Flaten σ_0 ligger i xy-planet. Enhetsnormal er da $\pm\mathbf{k}$, rett fortegn får vi med $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. Integralet blir et vanlig dobbeltintegral i x og y

$$\begin{aligned} Q_0 &= \int_{\sigma_0} \mathbf{v}(x,y,0) \cdot \mathbf{k} d\sigma \\ &= \int_{\sigma_0} v_z(x,y,0)\, dx\, dy = \int_{\sigma_0} Ab\, dx\, dy = Ab \int_{\sigma_0} dx\, dy = \pi A b a^2 \end{aligned}$$

Her brukes symbolet $\sim$ for "har benevning". Fra definisjonen av $\mathbf{v}$ og flatene ser vi at $a \sim$ m, $b \sim$ m og $A \sim 1/\,\mathrm{s}$. Dette oppfyller $\mathbf{v} \sim$ m/ s. En integrert volumfluks gjennom en flate skal ha benevning $Q_0 \sim \mathrm{m}^3/\,\mathrm{s}$. Innsetting i svar ovenfor gir

$$\pi A b a^2 \sim \mathrm{s}^{-1} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{m}^2 = \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}},$$

som stemmer.

3c (vekt 10%)

Parameteriser σ_K i r og θ og beregn volumfluksen, Q_K, ut gjennom σ_K som et flateintegral. Velg igjen en enhetsnormal som har positiv z-komponent.

Løsning. Det enkleste er å bruke sylinderkoordinater fullt ut. Da er

$$\mathbf{r}(r,\theta) = r\mathbf{i}_r + (a-r)\mathbf{k}.$$

Vi kunne også brukt kartesiske enhetskoordinater

$$\mathbf{r}(r,\theta) = r\cos\theta\mathbf{i} + r\sin\theta\mathbf{j} + (a-r)\mathbf{k},$$

men det blir litt mer regning.
Når vi bruker sylinderkordinater

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}(r\mathbf{i}_r + (a-r)\mathbf{k}) &&= \mathbf{i}_r - \mathbf{k}, \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}(r\mathbf{i}_r + (a-r)\mathbf{k}) &&= r\frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \theta} = r\mathbf{i}_\theta, \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 7.)

og

$$\mathbf{n}\,d\sigma = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\,dr\,d\theta = (\mathbf{i}_r - \mathbf{k})\times r\mathbf{i}_\theta\,dr\,d\theta = r(\mathbf{i}_r\times\mathbf{i}_\theta - \mathbf{k}\times\mathbf{i}_\theta)\,dr\,d\theta = r(\mathbf{k}+\mathbf{i}_r)\,dr\,d\theta.$$

Vi ser at $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} > 0$. Fortegn er altså riktig. Integralet kan nå skrives

$$\int_{\sigma_K} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^a (rv_r + rv_z)\,dr\,d\theta =$$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^a A(r^2 + r(a+b-r))\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^a A(a+b)r\,dr\,d\theta = \pi A(a+b)a^2.$$

Det er ikke spurt etter benevning her, men vi ser at vi får m^3/s slik vi skal ha.

3d (vekt 10%)

Bruk resultatet for Q_0 i deloppgave 3b og Gauss sats for å beregne Q_K.

Løsning. Vi observerer at σ_0 og σ_K omslutter det kjegleformede volumet, som vi kaller τ. Gauss sats gir

$$\int_\sigma \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \int_\tau \nabla\cdot\mathbf{v}\,d\tau,$$

der σ er kombinasjonen av σ_0 og σ_K. Fordi $\mathbf{n}$ skal peke ut av volumet må vi bytte fortegn på $\mathbf{n}$ når vi integrerer over σ_0, i forhold til hva vi benyttet i utregningen av Q_0. Dette betyr

$$\int_\sigma \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = Q_K - Q_0. \quad (**)$$

Divergensen er konstant slik at volumintegralet blir

$$\int_\tau \nabla\cdot\mathbf{v}\,d\tau = \int_\tau 3A\,d\tau = 3AV,$$

der V er volumet av kjeglen som er lik grunnflate ganger høyde delt på 3, dvs . $V = \frac{1}{3}a\pi a^2 = \frac{1}{3}\pi a^3$. Bruker vi Gauss sats og (**) får vi da

$$Q_K = Q_0 + 3AV = \pi A a^2 b + 3A\frac{1}{3}\pi a^3 = \pi A(a+b)a^2.$$

— *Slutt* —