Fasit for eksamen i MEK1100 gitt 13 desember 2010

Oppgave 1

1a Hastighetsfeltet $v_x = \partial\phi/\partial x = -\partial\psi/\partial y$ og $v_x = \partial\phi/\partial y = \partial\psi/\partial x$.

De to gradientene står normalt på hverandre

$$\nabla\phi \cdot \nabla\psi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0.$$

1b Det eksisterer et potensial ϕ, det ser vi enten ved at $\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$, eller ved inspeksjon $\phi = (x^2 + y^2)/2$.

Det eksisterer ikke en strømfunksjon siden $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 2 \neq 0$.

Strømlinjene er løsning av $\boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{r} = 0$. Dette gir differensiallikningene $x\,dy - y\,dx = 0$, $x\,dz = 0$ og $y\,dz = 0$. Disse er separable og gir $x = \alpha y$ og $z = \beta$, hvor α og β er vilkårlige konstanter.

Oppgave 2

Se eksempel 6.2 i boka. Skriv posisjonsvektor $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Finn så differensialet til posisjonsvektoren

$$d\boldsymbol{r} = \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\,du + \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\,dv + \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial w}\,dw$$

Herfra ser vi at koordinatenhetsvektorene blir

$$\boldsymbol{i}_u = \frac{\partial\boldsymbol{r}/\partial u}{|\partial\boldsymbol{r}/\partial u|} = \frac{v\boldsymbol{i} + u\boldsymbol{j}}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \boldsymbol{i}_v = \frac{\partial\boldsymbol{r}/\partial v}{|\partial\boldsymbol{r}/\partial v|} = \frac{u\boldsymbol{i} - v\boldsymbol{j}}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \boldsymbol{i}_w = \frac{\partial\boldsymbol{r}/\partial w}{|\partial\boldsymbol{r}/\partial w|} = \boldsymbol{k}$$

For å undersøke ortogonalitet regner vi ut $\boldsymbol{i}_u \cdot \boldsymbol{i}_v = \boldsymbol{i}_u \cdot \boldsymbol{i}_w = \boldsymbol{i}_v \cdot \boldsymbol{i}_w = 0$ og ser følgelig at de er ortogonale.

Oppgave 3

2a For eksempel

$$t \sim s, \quad T \sim K, \quad \kappa \sim \frac{m^2}{s}, \quad k \sim \frac{J}{msK}, \quad \boldsymbol{H} \sim \frac{J}{m^2 s}$$

2b Antakelsen om stasjonær temperatur betyr at venstresiden i (1) er lik 0.

Antakelsen at $T = T(r)$ medfører at høyresidene i (1) og (2) kun har ledd med r-deriverte. Likningene blir da

$$\frac{\kappa}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0 \qquad \text{og} \qquad \boldsymbol{H} = -k\boldsymbol{i}_r\frac{\partial T}{\partial r}$$

og det følger at brøken κ/r^2 i første likning ikke har noen betydning og kan fjernes for ytterligere forenkling.

Ved innsetting ser vi at

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{A}{r}+B\right)\right)=0$$

så dette er en løsning.

2c Beregn randkrav på innsiden og utsiden av det isolerende laget

$$T(a)=\frac{A}{a}+B=T_a \qquad \text{og} \qquad T(b)=\frac{A}{b}+B=T_b$$

som har løsning

$$A=\frac{ab}{b-a}(T_a-T_b) \qquad \text{og} \qquad B=\frac{bT_b-aT_a}{b-a}$$

Fluksen er gitt ved

$$Q=\int_\sigma \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma$$

hvor σ kan være hvilken som helst lukket flate rundt origo med avstand r fra origo mellom a og b, og $\boldsymbol{n}$ er utadrettet enhetsnormalvektor til σ. Det enkleste er å velge en kuleformet flate med konstant radius $r=R$, da blir enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}_r$. Vi regner ut $\boldsymbol{H}=k\boldsymbol{i}_rA/r^2$, og følgelig er integranden konstant

$$Q=\int_{r=R} kA\frac{1}{R^2}\,d\sigma=4\pi kA$$

hvor vi har benyttet formelen for overflaten til ei kule $4\pi R^2$.

For vårt valg av flate σ ser vi at varmefluksen ikke avhenger av radius R. At dette gjelder generelt, og ikke bare for kuleflater, ser vi fordi $\boldsymbol{H}$ er divergensfri for stasjonær temperatur ifølge likning (1). Anvendelse av Gauss sats gir derfor at fluksen ut gjennom enhver lukket flate er like stor.

Oppgave 4

4a I polare koordinater

$$\boldsymbol{v}=\left(\frac{A}{r}+U\sin\theta\right)\boldsymbol{i}_r+U\cos\theta\boldsymbol{i}_\theta$$

I kartesiske koordinater

$$\boldsymbol{v}=A\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}+U\boldsymbol{j}$$

Leddet med A representerer en kilde i origo. Leddet med U representerer uniform strøm parallell med y-aksen rettet i positiv y-retning.

4b Enhetssirkelen λ med $r = 1$ har utadrettet enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}_r$. Ellipsen μ har utadrettet enhetsnormalvektor

$$\boldsymbol{n} = \frac{\frac{x}{2}\boldsymbol{i} + \frac{2y}{9}\boldsymbol{j}}{\sqrt{(\frac{x}{2})^2 + (\frac{2y}{9})^2}}$$

Fluksen ut gjennom sirkelen er $Q_\lambda = \oint \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{i}_r \, ds = \int_0^{2\pi} A + Ur \sin\theta \, d\theta = 2\pi A$.

Fluksen ut gjennom ellipsen er vanskelig å regne ut direkte, men ved anvendelse av Gauss sats og det faktum at feltet er divergensfritt, så finner vi $Q_\mu = Q_\lambda = 2\pi A$.

4c

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}$$

Feltet er stasjonært så den tidsderiverte er lik null. I punktet $(0, 1)$ er $\boldsymbol{v} = (A + U)\boldsymbol{j}$ så vi trenger følgelig kun regne ut $\partial \boldsymbol{v}/\partial y$ som er lik $-A\boldsymbol{j}$ i punktet. Følgelig har vi $\boldsymbol{a} = -A(A + U)\boldsymbol{j}$.

4d I polare koordinater må vi løse

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -v_r = -\frac{A}{r} - U\sin\theta \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial r} = v_\theta = U\cos\theta$$

som har løsning

$$\psi = Ur\cos\theta - A\theta + c$$

hvor c er en konstant.

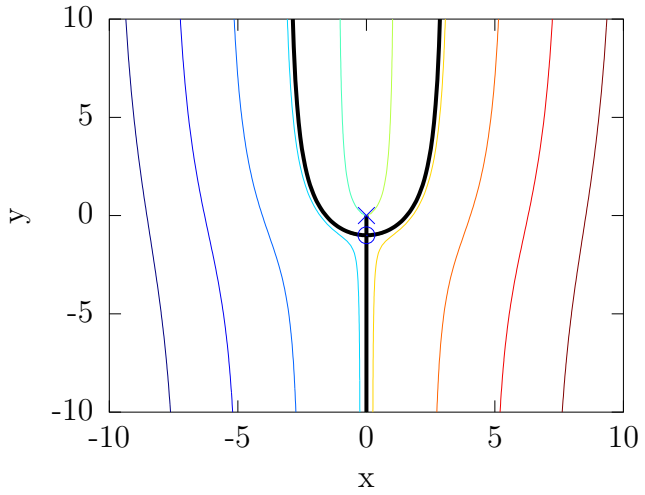
Stagnasjonspunktene er gitt ved $\boldsymbol{v} = 0$ som kun har én løsning $(r = A/U, \theta = -\pi/2)$.

Strømlinjen gjennom stagnasjonspunktet får vi ved å sette inn for stagnasjonspunktet

$$Ur\cos\theta - A\theta = \frac{\pi A}{2}$$

Figuren tegnes for eksempel ved å sette "x" i det singulære punktet som er origo, "o" i stagnasjonspunktet, og tegne strømlinjene gjennom stagnasjonspunktet. For det første ser vi at det er en slik strømlinje med $\theta = -\pi/2$. For det andre ser vi at det må være en slik strømlinje som er krum som en "skål" åpen i positiv y-retning. Denne "skåla" kan vi tegne etter at vi ser at når $\theta \to \pi/2$ så har vi $r \to \infty$ og $x = r\cos\theta = \pi A/U$, og når $\theta \to -3\pi/2$ så har vi $r \to \infty$ og $x = r\cos\theta = -\pi A/U$, og så husker vi at "skåla" skal gå gjennom stagnasjonspunktet.

I figuren er strømlinjene gjennom stagnasjonspunktet indikert med tykk svart kurve, og det er satt $A = U = 1$.


10
5
0
-5
-10
y
-10
-5
0
5
10
x