Fasit for eksamen i MEK1100 gitt 12 desember 2011

Oppgave 1

1a Første ledd er rettlinjet bevegelse i z-retning.

Andre ledd er rotasjon som fast legeme rundt z-aksen.

α har enhet "lengde/tid".

β har enhet "1/tid".

Feltet er karakterisert av en omløpstid, som er tiden for rotasjon rundt z-aksen. Omløpstiden er $T = 2\pi/\beta$.

1b

$$\text{Divergens:} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \qquad\qquad \text{Virvling:} \quad \nabla \times \boldsymbol{v} = 2\beta \boldsymbol{k}$$

Da virvlingen er ulik 0 så har feltet ikke et potensial.

Feltet er divergensfritt, og det utelukker ikke at en strømfunksjon kan eksistere. Feltet er imidlertid tredimensjonalt i xyz-koordinatene og har derfor ikke en strømfunksjon som kan uttrykkes ved to av disse koordinatene på den vanlige måten i kurset.

1c Akselerasjon

$$\boldsymbol{a} = -\beta^2(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j})$$

Oppgave 2

2a I kartesiske koordinater

$$\boldsymbol{v} = \left(A + \frac{Bx}{x^2+y^2}\right)\boldsymbol{i} + \left(A + \frac{By}{x^2+y^2}\right)\boldsymbol{j}$$

I polare koordinater

$$\boldsymbol{v} = \left(A(\cos\theta + \sin\theta) + \frac{B}{r}\right)\boldsymbol{i}_r + A(\cos\theta - \sin\theta)\boldsymbol{i}_\theta$$

Stagnasjonspunkt: Enten $\left\{x = y = -\dfrac{B}{2A}\right\}$ eller $\left\{r = \dfrac{B}{\sqrt{2}A}, \theta = -\dfrac{3\pi}{4}\right\}$.

Singulært punkt: Origo $x = y = 0$ er en kilde.

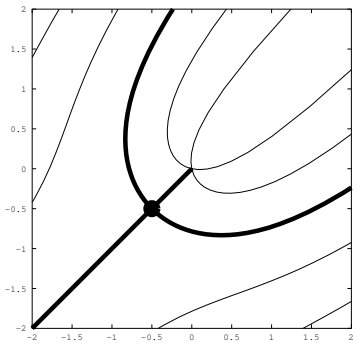
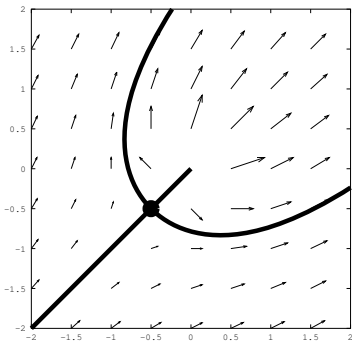
2b Strømfunksjonen eksisterer og er gitt ved

$$\psi = A(x - y) - B\theta + D$$

hvor D er en konstant.

Strømlinjer gjennom stagnasjonspunktet: Sett ψ lik verdien den har i stagnasjonspunktet. Det er to løsninger, en enkel løsning gitt ved $\theta = -\dfrac{3\pi}{4}$ og en mer komplisert løsning gitt enten ved

$$x - y = \frac{B(\theta + \frac{3\pi}{4})}{A} \qquad \text{eller} \qquad r = \frac{B(\theta + \frac{3\pi}{4})}{A(\cos\theta - \sin\theta)}$$

Det kan være vanskelig å se hvordan den "skålformede" kurven ser ut. Det er heller ikke nødvendig å tegne den inn spesielt nøyaktig, en grov frihåndstegning er nok!

2c Bernoullis likning forutsetter: 1) friksjonsfri strømning, 2) stasjonær strømning, 3) konstant tetthet eller inkompressibelt fluid. Feltet oppfyller alle kravene.

Da er $\frac{p}{\rho}+gz+\frac{v^2}{2}$ konstant langs en strømlinje. Vi legger merke til at de to punktene ligger på samme strømlinje. Derfor kan vi benytte Bernoullis likning og får

$$p_b = p_a + \frac{\rho B}{2a}\left(\frac{3B}{8a} - A\right)$$

Oppgave 3

Det er diverse forklaringer på hvorfor flasker har så merkelig form, se for eksempel: `http://en.wikipedia.org/wiki/Wine_bottle#Punts`

3a

$$\boldsymbol{n} = \frac{-h'(r)\boldsymbol{i}_r + \boldsymbol{k}}{\sqrt{(h'(r))^2+1}} \qquad \text{og} \qquad d\sigma = r\sqrt{(h'(r))^2+1}\,dr\,d\theta$$

3b Eulers likning er $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\boldsymbol{k}$. Sett inn og vis at den er oppfylt!

$$A = p_0 + \rho g H$$

3c

$$d\boldsymbol{F} = -p\boldsymbol{n}\,d\sigma = -(p_0 + \rho g H - \rho g h(r))(-h'(r)\boldsymbol{i}_r + \boldsymbol{k})r\,dr\,d\theta$$

3d Væskevolumet $V = 2\pi\int_0^R (H - h(r))r\,dr$.

Væska sin tyngde $\mathcal{T} = -\rho g V\boldsymbol{k}$.

Total trykkraft på bunnen regnes ut enten ved direkte beregning av overflateintegral på bunnen, eller indirekte ved hjelp av integralsats (en variant av Gauss sats) og vi får $\boldsymbol{F} = \mathcal{T} - \pi R^2 p_0\boldsymbol{k}$.

Vi ser at dersom det totale væskevolumet holdes konstant, så vil ikke den totale trykkraften være avhengig av bunnprofilen.