Fasit for eksamen i MEK1100 gitt 13 juni 2012

Oppgave 1

1a Gradient $\nabla h = \left.\dfrac{-2x\boldsymbol{i} - 4y\boldsymbol{j}}{(x^2+2y^2)^2}\right|_{x=1,y=0} = -2\boldsymbol{i}$

Enhetsvektor i retning nordøst $\boldsymbol{a} = \dfrac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}}{\sqrt{2}}$

Retningsderivert $\boldsymbol{a}\cdot\nabla h|_{x=1,y=0} = -\sqrt{2}$

1b Posisjonsvektor $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}$

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\right|_{x=1,y=0} = \boldsymbol{i} + \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=1,y=0}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k}$$

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right|_{x=1,y=0} = \boldsymbol{j} + \left.\frac{\partial h}{\partial y}\right|_{x=1,y=0}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\boldsymbol{k} - \frac{\partial h}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial h}{\partial y}\boldsymbol{j}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}}{\sqrt{5}}$$

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{5}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Oppgave 2

2a Dersom vi antar $T = T(y)$ så får vi fra varmeledningslikninga $\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ som må løses med randkrav $T(0) = T_0$ og $T(B) = T_1$, dette gir $T(y) = T_0 + (T_1 - T_0)\dfrac{y}{B}$

2b Varmefluks per flate (langs et plan parallelt med xz-planet)

$$(\rho c T\boldsymbol{v} - k\nabla T)\cdot\boldsymbol{j} = -k\frac{\partial T}{\partial y} = k\frac{T_0 - T_1}{B}$$

Det er kun varmeledning gitt ved Fouriers lov som gir bidrag.

2c Varmefluks per lengde (langs ei linje parallell med z-aksen)

$$\int_0^B (\rho c T\boldsymbol{v} - k\nabla T)\cdot\boldsymbol{i}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}U\rho cB(T_0 + T_1).$$

Det er kun advektiv varmetransport som gir bidrag.

Oppgave 3

3a $B = U$ og $A = -V$

3b Bernoullis likning forutsetter

- friksjonsfri strømning
- stasjonær strømning
- konstant tetthet eller inkompressibelt fluid

Da er $\frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}$ konstant langs en strømlinje.

Hastighetsfeltet i spiralvirvelen har divergens lik null så vi vet at strømningen er inkompressibel. Videre ser vi at spiralvirvelen sitt hastighetsfelt ikke er avhengig av tid, det er med andre ord stasjonært. At strømningen er friksjonsfri kan vi ta for gitt (vi har ingen viskositet).

3c

$$p(r) = p_0 - \rho\frac{U^2 + V^2}{2r^2}$$

Løsningen er fysisk relevant kun hvor $p \geq 0$ (og mest sannsynlig kun for $p > p_1$ hvor $p_1 > 0$ for eksempel kan være damptrykket til væsken).

3d Når lufta presser vekk vannet vil vannoverflaten ikke være horisontal, la overflaten være $z = h(r)$ hvor vi foreskriver at $h = 0$ uendelig langt vekk fra origo. Bernoullis likning beregnet på vannoverflaten gir nå

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{U^2 + V^2}{2r^2} + gh(r) = \frac{p_0}{\rho}$$

og følgelig

$$h(r) = -\frac{U^2 + V^2}{2gr^2}$$

Denne løsningen medfører at strømlinjene ikke lenger kan gå horisontalt, noe som bryter med den grunnleggende formen til sprialfeltet ovenfor. Løsningen kan likevel være en nyttig tilnærming tilstrekkelig langt fra origo.

Oppgave 4

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = v\cos\theta\boldsymbol{i} + v\sin\theta\boldsymbol{j} + u\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = u\cos\theta\boldsymbol{i} + u\sin\theta\boldsymbol{j} - v\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = -uv\sin\theta\boldsymbol{i} + uv\cos\theta\boldsymbol{j} + u\boldsymbol{k}$$

Skaleringsfaktorer

$$h_u = h_v = \sqrt{u^2 + v^2} \qquad \text{og} \qquad h_\theta = uv$$

Ortogonalitet

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = 0$$

Volumelement

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}\theta = (u^2 + v^2)uv \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}\theta$$

Volum

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 (u^2 + v^2)uv \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}$$