Fasit for eksamen i MEK1100 gitt 12 juni 2013

Oppgave 1

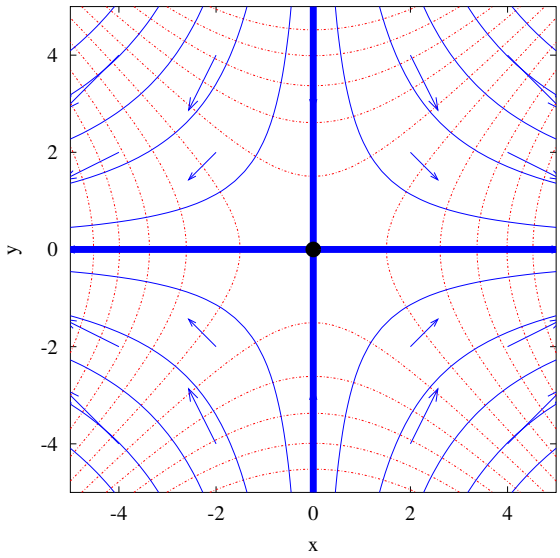
(se kapittel 9.4.2 i kompendiet)

Vektorfelt $\boldsymbol{v} = \nabla\phi = 2x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j}$

Strømfunksjon $\psi = -2xy + C$ hvor C er en vilkårlig konstant

Origo er stagnasjonspunkt

Strømlinjene gjennom origo er x- og y-aksene



I figuren er stagnasjonspunktet markert med •, strømlinjer er markert med blå heltrukne streker, strømlinjene gjennom stagnasjonspunktet er markert med tykke blå linjer, ekvipotensialkurver er markert med stiplede røde streker.

Oppgave 2

(se oppgave 10.3, og eventuelt også oppgave 9.7, begge i kompendiet)

2a I polarkoordinater: Sett $\boldsymbol{r}(\theta) = R\boldsymbol{i}_r$ for $0 \leq \theta \leq 2\pi$, da får vi $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{i}_\theta \,\mathrm{d}\theta$.

$$\oint_{r=R} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \frac{A}{R}\boldsymbol{i}_\theta \cdot R\boldsymbol{i}_\theta \,\mathrm{d}\theta = 2\pi A$$

I kartesiske koordinater: Sett $\boldsymbol{r}(\theta) = R(\boldsymbol{i}\cos\theta + \boldsymbol{j}\sin\theta)$ for $0 \leq \theta \leq 2\pi$, da får vi $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = R(-\boldsymbol{i}\sin\theta + \boldsymbol{j}\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

$$\oint_{r=R} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \frac{A}{R}(-\boldsymbol{i}\sin\theta + \boldsymbol{j}\cos\theta) \cdot R(-\boldsymbol{i}\sin\theta + \boldsymbol{j}\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi A$$

2b I polare koordinater:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = \left(\frac{A}{r}\boldsymbol{i}_\theta \cdot \nabla\right)\left(\frac{A}{r}\boldsymbol{i}_\theta\right) = \frac{A}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{A}{r}\boldsymbol{i}_\theta\right) = -\frac{A^2}{r^3}\boldsymbol{i}_r$$

Tilsvarende i kartesiske koordinater.

2c Vi kan enten løse det som er igjen av Euler-likninga:

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$

eller

$$\nabla p = \rho\frac{A^2}{r^3}\boldsymbol{i}_r$$

som gir

$$p = p_0 - \rho\frac{A^2}{2r^2}$$

Alternativt kan vi bruke Bernoullis likning, til tross for at strømlinjene er sirkler! Dersom virvlingen til hastighetsfeltet er null så vet vi at Bernoullis likning sier at størrelsen $H = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz$ er konstant overalt, en felles konstant for alle strømlinjer. Det feltet vi her ser på er virvelfritt. Vi kan ta et referansepunkt med endelig radius r og et annet referansepunkt med uendelig radius hvor trykket er p_0:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{p_0}{\rho}$$

som gir samme svar

$$p = p_0 - \rho\frac{A^2}{2r^2}$$

Oppgave 3

(se beskrivelsen av eksperimenter vi har gjort i løpet av våren)

Trykket $p = p_0 + \rho g(h - H)$

Kraften $\boldsymbol{F} = [p_0 + \rho g(h - H)]\, B\boldsymbol{k}$.

Oppgave 4

(se oppgave 10.12 i kompendiet)

4a Her er T temperaturen i Kelvin K, κ er varmediffusiviteten i m^2/s, k er vameledningstallet i $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{msK}}$, A har fysisk enhet K/m^5, og $\boldsymbol{H}$ er varmeflukstettheten i $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2\mathrm{s}}$.

4b

$$\nabla T = A(a - 2x)(yb - y^2)z\boldsymbol{i} + A(xa - x^2)(b - 2y)z\boldsymbol{j} + A(xa - x^2)(yb - y^2)\boldsymbol{k}$$

I sentrum av rommet har vi $\nabla T = \frac{Aa^2b^2}{16}\boldsymbol{k}$ som peker oppover, altso må myggen fly rett ned.

4c

$$\nabla^2 T = \nabla \cdot \nabla T = -2A(yb - y^2)z - 2A(xa - x^2)z$$

og ettersom dette ikke er identisk lik null, så er temperaturfordelingen gitt i oppgaven ikke en likevektsløsning.

I midten av rommet har vi

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T = -\kappa A c \frac{a^2 + b^2}{4} < 0$$

som er negativ. Følgelig vil temperaturen avta.

4d Fouriers lov sier at varmeflukstettheten er $\boldsymbol{H} = -k\nabla T$. Den totale fluksen ut av rommet er

$$\int_S \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = \int_S -k\nabla T \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = \int_V -k\nabla^2 T \, \mathrm{d}\tau$$

hvor S er vegger og gulv og tak, $\boldsymbol{n}$ er enhetsvektor ut av S, og hvor V er volumet innenfor S. Vi har brukt Gauss sats for å omforme overflateintegralet til et volumintegral.

Utregning gir

$$\int_S \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = kAabc^2 \frac{a^2 + b^2}{6}$$

Oppgave 5

(se oppgave 10.9 i kompendiet og beskrivelsen av eksperimenter vi har gjort i løpet av våren)

Vi løser oppgaven ved hjelp av Bernoullis likning, denne anvender vi langs en strømlinje fra overflaten til innsjøen A, gjennom røret, og ut i tappepunktet C. Vi kan med god tilnærming sette $v = 0$ i overflaten til innsjøen fordi den antas å være stor i forhold til mengden vann som tappes. Trykket er lik lufttrykket p_0 både ved overflaten til innsjøen og ved tappepunktet. Bruker vi Bernoullis likning ved A og ved C får vi

$$\frac{p_0}{\rho} + gh = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v^2}{2}$$

så $v = \sqrt{2gh}$.

Fluksen i røret blir

$$Q = Sv = S\sqrt{2gh}.$$