Fasit for avsluttende eksamen i MEK1100
gitt 13 desember 2013

Oppgave 1

1a $\alpha \sim$ K, $\beta \sim$ K/m^3, $\kappa \sim$ m^2/s, $k \sim$ J/(msK) og $\boldsymbol{H} \sim$ J/(m^{2}s).

Størrelsen $\boldsymbol{v}$ er konveksjonshastigheten i staven. I vårt tilfelle har vi ingen grunn til å tro at det er bevegelse i staven, så $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

1b Vi regner ut

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T = 6\beta\kappa x,$$

derfor vil temperaturen holde seg konstant i $x = 0$. For $x > 0$ vil temperaturen øke dersom $\beta > 0$, avta dersom $\beta < 0$ og holde seg konstant dersom $\beta = 0$.

Varmefluksen $Q = \int_{x=L} -k\nabla T \cdot \boldsymbol{i}\, d\sigma = -3k\beta L^2 A$.

Oppgave 2

2a

$$\boldsymbol{v} = (y^2 - x^2)\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

Langt vekk fra origo går hastigheten mot uendelig, det kan ikke være noen god modell.

2b Vektorfeltet er 2D og divergensfritt, følgelig har det en strømfunksjon.

$$\psi = x^2 y - \frac{1}{3}y^3 + C$$

hvor C er en vilkårlig konstant.

Origo er eneste stagnasjonspunkt.

Strømlinjene gjennom origo er $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$ og $y = -\sqrt{3}x$.

Tegn skisse!

2c Bernoullis likning krever ideelt fluid (ingen friksjon), konstant tetthet, og stasjonært hastighetsfelt. Da er

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{konstant langs en strømlinje}$$

x-aksen er en strømlinje, og der er $\boldsymbol{v} = -x^2\boldsymbol{i}$, følgelig har vi

$$p = p_0 - \frac{x^4\rho}{2}$$

Dette gir fysisk mening så lenge $p \geq 0$, det vil si $|x| \leq (2p_0/\rho)^{1/4}$.

Merk at når virvlinga er null, som i dette tilfellet, så er uttrykket i Bernoullis likning konstant overalt uavhengig av strømlinjer, derfor hadde det ikke vært nødvendig å merke seg at x-aksen er en strømlinje.

Oppgave 3

Dette er oppgave 6.2 i den gule boka.

3a

$$h_u = \sqrt{u^2 + v^2}$$
$$h_v = \sqrt{u^2 + v^2}$$
$$h_w = \frac{uv}{\sqrt{1 - w^2}}$$

3b Regn ut at skalarproduktet mellom alle par koordinatvektorer er null.

Koordinatene er ortogonale.

3c

$$d\tau = h_u h_v h_w \, du \, dv \, dw = \frac{uv(u^2 + v^2)}{\sqrt{1 - w^2}} \, du \, dv \, dw$$

Oppgave 4

4a

$$p = p_0 - \rho g z$$
$$\boldsymbol{F}_l = -\int_{S_l} \boldsymbol{k} p_0 \, d\sigma = -\boldsymbol{k} p_0 ab$$

Flateintegralet for $\boldsymbol{F}_g$ over S_g omformes med en variant av Gauss sats

$$\boldsymbol{F}_g = -\int_{S_g} \boldsymbol{n} p \, d\sigma = \boldsymbol{F}_l + \int_V \nabla p \, d\tau$$

Og verdien er

$$\boldsymbol{F}_g = -\boldsymbol{k}(p_0 + \rho g h)ab$$

4b Dette er i praksis oppgave 3 i midtveiseksamen.

Trykkrafta fra vannet på akvarieveggen er

$$\boldsymbol{F}_{\text{vann}} = -\boldsymbol{j} \int p \, d\sigma = -\boldsymbol{j} \int_0^a \int_{-h}^0 p_0 - \rho g z \, dz \, dx = -\boldsymbol{j} ah(p_0 + \frac{1}{2}\rho g h)$$

Trykkrafta fra lufta på akvarieveggen er

$$\boldsymbol{F}_{\text{luft}} = \boldsymbol{j} \int p \, d\sigma = \boldsymbol{j} \int_0^a \int_{-h}^0 p_0 \, dz \, dx = \boldsymbol{j} ahp_0$$

Total trykkraft blir

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\text{vann}} + \boldsymbol{F}_{\text{luft}} = -\frac{1}{2}\rho g a h^2 \boldsymbol{j}$$