Fasit for avsluttende eksamen i MEK1100 gitt 12 juni 2015

Oppgave 1

1a $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = y^2 - x^2$

$\nabla \times \boldsymbol{v} = -4xy\boldsymbol{k}$

1b Feltet har ikke en strømfunksjon fordi det ikke er divergensfritt.

Feltet har ikke et potensial fordi det ikke er virvelfritt.

1c Løs likninga $\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$ for å finne strømlinjene. Likninga har tre typer løsninger: $x = 0$, $y = 0$, og $x^2 + y^2 =$konstant. Alle punkter langs x-aksen og y-aksen er stagnasjonspunkter. Strømlinjene er derfor sirkler rundt origo. Retningen på strømningen er langs sirkelbuene fra y-aksen til x-aksen.

1d Sirkulasjonen er $-1/2$. Dette kan man regne ut på to forskjellige måter. Enten kan man regne ut sirkulasjonen direkte ved å parametrisere sirkelbuen, eller man kan bruke Stokes (eller Greens) teorem og regne ut et flateintegral over området avgrenset av kurven γ. Begge måtene er omtrent like arbeidskrevende, kanskje utregningen er litt enklere ved bruk av Stokes sats.

Oppgave 2

2a ρ er tetthet med enhet kg/m^3

T er absolutt temperatur med enhet K

k er varmeledningstall (eller termisk konduktivitet) med enhet J/(msK)

κ er varmediffusivitet med enhet m^2/s

$\boldsymbol{H}$ er varmeflukstetthet med enhet J/(m^{2}s)

2b Den integrerte varmefluksen er $\int_{x=x_0} \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{i}\, \mathrm{d}\sigma = \pi a^2 \left\{ \frac{1}{2}\rho c(T_0 + \alpha x_0)v_0 - k\alpha \right\}$

NB! Det er ikke spesifisert hvilken vei fluksintegralet skal være orientert, i positiv eller negativ x-retning, derfor er det like riktig å oppgi svaret med motsatt fortegn.

2c Vi finner fra varmetransportlikninga ved tiden $t = t_0$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -v_0 \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \alpha$$

som er negativ for $r < a$. Følgelig vil temperaturen avta i tid ved tiden $t = t_0$.

Endringen er størst i midten og lik null langs veggen til røret, følgelig kommer ikke temperaturen til å forbli konstant i tverrsnittet for fastholdt x.

Oppgave 3

3a

$$p = p_0 - \rho g(z - h)$$

$$\boldsymbol{F} = -\int_{z=0} p\boldsymbol{k}\, \mathrm{d}\sigma = -(p_0 + \rho g h)\pi a^2 \boldsymbol{k}$$

3b

$$\boldsymbol{a} = \frac{D\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\omega^2 r \boldsymbol{i}_r$$

3c Det roterende vannet er ikke virvelfritt, og vil ha strømlinjer gitt ved sirkler rundt senteraksen. Bernoullis likning sier at $\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz =$ konstant langs hver av disse sirklene, men fordi hastighetsfeltet har virvling vil konstanten være forskjellig for hver radius. Bernoullis likning forteller oss ikke hvordan vi skal finne denne ukjente funksjonsavhengigheten av radius, så vi kan ikke bruke Bernoullis likning.

Vi løser Eulers likning istedenfor, som sier

$$\nabla p = -\rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} - \rho g \boldsymbol{k}$$

og vi finner

$$p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z + C$$

hvor C er en konstant som må bestemmes.

På den frie overflata $z = \eta(r)$ er vanntrykket lik lufttrykket, $p = p_0$:

——— *alternativ 1* ———

Den frie overflata får parabolsk form

$$\eta(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + \frac{C - p_0}{\rho g}.$$

Volumet av vannet skal være det samme som det opprinnelige volumet

$$2\pi \int_0^a \eta(r) r \, \mathrm{d}r = \pi a^2 h$$

og følgelig får vi konstanten

$$C = \rho g h + p_0 - \frac{\rho\omega^2 a^2}{4}$$

For å finne total trykkraft på bunnen vet vi nå at trykket der er

$$p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 \left(r^2 - \frac{a^2}{2} \right) + \rho g h + p_0$$

Dette gir en trykkraft på bunnen som er like stor som i deloppgave 3a fordi

$$\int_0^a \left(r^2 - \frac{a^2}{2} \right) r \, \mathrm{d}r = 0.$$

——— *alternativ 2* ———

I det generelle uttrykket for trykket kan konstanten C nå byttes ut med uttrykket for overflatehevningen $\eta(r)$

$$p = p_0 + \rho g[\eta(r) - z]$$

Dette gir en trykkraft på bunnen

$$\boldsymbol{F} = -\int [p_0 + \rho g \eta(r)] \boldsymbol{k} \, \mathrm{d}\sigma = -(p_0 \pi a^2 + \rho g V) \boldsymbol{k}$$

hvor V er volumet av vannet som er lik det opprinnelige volumet, og følgelig er dette resultatet identisk med det vi fant i 3a.