Løsningsforslag for noen av oppgavene i eksamen i MEK1100 gitt 12 juni 2015

Oppgave 1

1d Sirkulasjonen kan regnes ut enten som et kurveintegral eller som et flateintegral, i henhold til Stokes sats

$$\oint_\gamma \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_S \nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}\,\mathrm{d}\sigma$$

hvor S er den delen av xy-planet som er avgrenset av kurven γ, og vi har allerede tatt høyde for at enhets normalvektor $\boldsymbol{n}$ står i positiv z-retning i henhold til orienteringen til γ.

For å regne ut kurveintegralet lønner det seg å observere at $\boldsymbol{v}$ er lik 0 langs x- og y-aksene, derfor er det kun nødvendig å integrere langs sirkelbuen fra A til B. En passende parametrisering kan være $\boldsymbol{r}(\theta) = \boldsymbol{i}\cos\theta + \boldsymbol{j}\sin\theta$ for $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$. Vi har differensialet $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (-\boldsymbol{i}\sin\theta + \boldsymbol{j}\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$. Samtidig har vi feltet innsatt parametriseringen $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\cos\theta\sin^2\theta - \boldsymbol{j}\cos^2\theta\sin\theta$. Dersom skalarproduktet forenkles slik $\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (-\cos\theta\sin^3\theta - \cos^3\theta\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = -\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2}\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta$, blir integrasjonen spesielt enkel

$$\oint_\gamma \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{1}{4}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

For å regne ut flateintegralet lønner det seg å introdusere polare koordinater $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$ for $0\le r\le 1$ og $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$. Flateelementet er $\mathrm{d}\sigma = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ og flateintegralet blir

$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 -4r^3\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \left[r^4\right]_0^1\left[\frac{1}{4}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Oppgave 3

3b Først regner vi ut hastighetsfeltet

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R} = \omega\boldsymbol{k}\times(r\boldsymbol{i}_r + z\boldsymbol{k}) = \omega r\boldsymbol{i}_\theta.$$

Vi legger merke til at hastighetsfeltet er stasjonært fordi det ikke er funksjon av tid.

Deretter regner vi ut akselerasjonen til vannpartiklene som den partikkelderiverte av hastighetsfeltet

$$\boldsymbol{a} = \frac{D\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}.$$

Siden hastighetsfeltet er stasjonært så får vi kun bidrag fra den konvektivt deriverte. For å regne ut den konvektivt deriverte utfører vi først skalarproduktet

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla = \omega r\boldsymbol{i}_\theta\cdot\left(\boldsymbol{i}_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\boldsymbol{i}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) = \omega\frac{\partial}{\partial\theta},$$

og så resten

$$(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = \omega \frac{\partial}{\partial \theta} (\omega r \boldsymbol{i}_\theta) = \omega^2 r \frac{\partial \boldsymbol{i}_\theta}{\partial \theta} = -\omega^2 r \boldsymbol{i}_r$$

som vi gjenkjenner som sentripetalakselerasjon.

Som hjelp for å regne ut den deriverte av koordinatvektoren kan vi huske at $\boldsymbol{i}_r = \boldsymbol{i} \cos\theta + \boldsymbol{j} \sin\theta$ og $\boldsymbol{i}_\theta = -\boldsymbol{i} \sin\theta + \boldsymbol{j} \cos\theta$, og at de kartesiske koordinatvektorene $\boldsymbol{i}$ og $\boldsymbol{j}$ er konstant.