Løsningsforslag Eksamen MEK1100 - 2021

Oppgave 1

a)

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = yz$$

$$v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = xz$$

$$v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = xy$$

$$\underline{\vec{v} = yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + xy\,\vec{k}}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} yz + \frac{\partial}{\partial y} xz + \frac{\partial}{\partial z} xy$$

$$= \underline{0}$$

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y} xy - \frac{\partial}{\partial z} xz\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial z} yz - \frac{\partial}{\partial x} xy\right)$$

$$+ \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x} xz - \frac{\partial}{\partial y} yz\right)$$

$$= \underline{\underline{\vec{0}}}$$

b) Kulens flate kan beskrives som en implisitt flate

$$B(x,y,z) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 2z^2$$

Enhetsnormalvektor er da

$$\vec{n} = \frac{\nabla B}{|\nabla g|}$$

$$\nabla B = 2x\vec{i} + y\vec{j} + 4z\vec{k}$$

$$|\nabla B| = \sqrt{4x^2 + y^2 + 16z^2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{n} = \frac{2x\vec{i} + y\vec{j} + 4z\vec{k}}{\sqrt{4x^2+y^2+16z^2}}$$

$\vec{n}$ kan også finnes ved å bruke

de deformerte kulekoordinatene, men utregningen er da mer kompliseert

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right|}$$

Finner

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r\left(\cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sqrt{2}\cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\vec{k}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = r\sin\theta\left(-\sin\varphi\,\vec{i} + \sqrt{2}\cos\varphi\,\vec{j}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = r^2\sin\theta\left(\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \frac{\sin\theta\sin\varphi}{\sqrt{2}}\vec{j} + \sqrt{2}\cos\theta\,\vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \frac{\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \frac{\sin\theta\sin\varphi}{\sqrt{2}}\vec{j} + \sqrt{2}\cos\theta\,\vec{k}}{\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{2} + 2\cos^2\theta}}$$

Dette er også et godkjent svar.

c) Skaleringsfaktorer

$$h_r = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right| = \left| \sin\theta\cos\varphi\, i + \sqrt{2}\sin\theta\sin\varphi\, j + \frac{\cos\theta}{\sqrt{2}} k \right|$$

$$= \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi + 2\sin^2\theta\sin^2\varphi + \frac{\cos^2\theta}{2}}$$

Kan også skrives

$$h_r = \frac{|\vec{r}|}{r}$$

$$h_\theta = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right| = r\sqrt{\cos^2\theta\cos^2\varphi + 2\cos^2\theta\sin^2\varphi + \frac{\sin^2\theta}{2}}$$

$$h_\varphi = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right| = r\sin\theta\sqrt{\sin^2\varphi + 2\cos^2\varphi}$$

Formler for ∇f og $\nabla \cdot \vec{u}$ finnes i kap 6.2 i V.C.

$$\nabla f = \frac{1}{h_r}\frac{\partial f}{\partial r} i_r + \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} i_\theta + \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial f}{\partial \varphi} i_\varphi$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(u_r h_\theta h_\varphi\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(u_\theta h_r h_\varphi\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(u_\varphi h_r h_\theta\right)\right)$$

I tillegg må det oppgis at

$$\hat{e}_r = \frac{1}{h_r}\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}, \quad \hat{e}_\theta = \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}, \quad \hat{e}_\varphi = \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$$

d) Vi har fra a) at $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

Vi kan dermed enkelt bruke Gauss' sats

$$\oint_\sigma \vec{v} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \int_V \nabla \cdot \vec{v}\, dV$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

Hvis man finner dette svaret uten å bruke Gauss' sats, trekkes det 5 poeng.

Oppgave 2

a) For et inkompressibelt ideelt fluid har vi massebevarelse

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \qquad \text{(V.C. Eq. (5.11))}$$

Setter inn for $\vec{v}$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -1$$

$$\Rightarrow v_y = -y + C(x)$$

For å finne $C(x)$ kan vi se på midten av kanalen. Siden strømningen er symmetrisk, så må $v_y(y=0) = 0$

$$v_y(x, 0) = 0 + C(x) = 0$$

hvilket gir at $C(x) = 0$.

Vi får $v_y = -y$, og

$$\vec{v} = \varepsilon\left(x\vec{i} - y\vec{j}\right)$$

Strømfunksjonen finnes ved at

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{og} \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\varepsilon x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad -\varepsilon y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \psi = -\varepsilon xy + C_1(x) \qquad \Rightarrow \psi = \varepsilon xy + C_2(y)$$

For at disse to skal være like, så må C_1 og C_2 være like konstanter. Velger vilkårlig $C_1 = C_2 = 0$

$$\psi = -\varepsilon xy$$

(Fortegnet er også vilkårlig)

b) Fluksen er gitt ved

$$\int_B \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_B \vec{v} \cdot \vec{i} \, d\sigma$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \varepsilon x \, dy \cdot 1$$

(1: Enhets-dybde i z-retning. Ikke viktig)

$$= \varepsilon x \, [y]_{-1/2}^{1/2}$$

$$= \varepsilon x \quad = 2\varepsilon$$

På grunn av massebevarelse, så vil massestrømmen inn ved A være lik massestrømmen ut ved B. Det er ingen strømning gjennom øvre og nedre vegg, siden strømningen er parallell med veggen. Det er flere måter å vise dette på. Den enkleste er at $h(x) = \frac{1}{x}$ er en strømlinje. Vi har

$$\psi(x,y) = -\varepsilon x y$$

Setter $\psi = -\varepsilon$ og får

$$\psi(x,y) = -\cancel{\varepsilon} = -\cancel{\varepsilon} x y$$

$$\Rightarrow y = 1/x$$

som er lik $h(x)$.

Eventuelt vis at $\vec{v} \parallel$ veggen.
Har da at (gure) veggen er parametrisert med

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + \frac{1}{x}\,\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dx} = \vec{i} - \frac{1}{x^2}\,\vec{j}$$

$$\vec{v} \times \frac{d\vec{r}}{dx} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varepsilon x & -\varepsilon\frac{1}{x} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{x^2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\cdot 0 + \vec{j}\cdot 0 + \vec{k}\left(-\varepsilon\frac{x}{x^2} - \left(-\frac{\varepsilon}{x}\right)\right)$$

$$= \underline{\vec{0}}$$

Så $d\vec{r} \times \vec{v} = \vec{0}$ og derfor er $\vec{v}$ parallell med $d\vec{r}$. Dermed er det vist at $\vec{v}$ er tangent med veggen, og dermed har vi også $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$. Så $\int \vec{v} \cdot \vec{n} \, do = 0$ for veggene.

Det er altså flere måter å vise dette på. Det holder med én god forklaring.

2c) $\vec{v} \cdot \nabla = \varepsilon(x\vec{i} - y\vec{j}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}\right)$

$$= \varepsilon x \frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon y \frac{\partial}{\partial y}$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \varepsilon x \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon x\vec{i} - \varepsilon y\vec{j}) - \varepsilon y \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon x\vec{i} - \varepsilon y\vec{j})$$

$$= \varepsilon x(\varepsilon\vec{i} - 0) - \varepsilon y(-\varepsilon\vec{j})$$

$$= \underline{\underline{\varepsilon^2(x\vec{i} + y\vec{j})}}$$

2d) Vi har et ideelt fluid og kan bruke Bernoulli's likning langs midten av kanalen.

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2}|\vec{v}_A|^2 + g\cdot 0 = \frac{P_B}{\rho} + \frac{1}{2}|\vec{v}_B|^2 + g\cdot 0$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}(1,0) = \varepsilon \vec{i} \qquad \vec{v}_B = \vec{v}(2,0) = \varepsilon\cdot 2\vec{i}$$

$$|\vec{v}_A|^2 = \varepsilon^2 \quad , \quad |v_B|^2 = 4\varepsilon^2$$

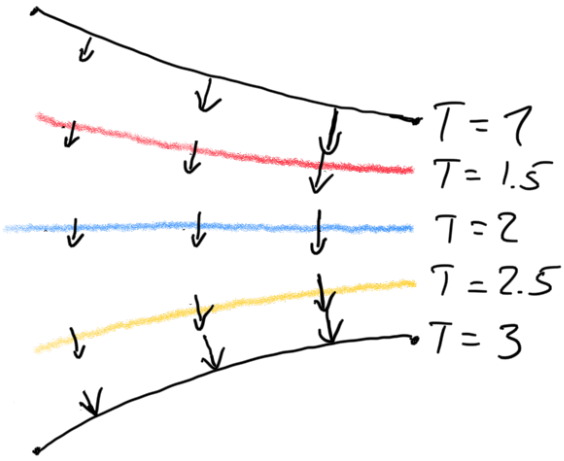
$$P_B - P_A = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^2 - 4\varepsilon^2\right) = -\frac{3}{2}\varepsilon^2$$

2e) $$T(x,y) = T_0\left(2 - \frac{y}{h}\right) = T_0(2 - xy)$$

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j}$$

$$= -T_0 y\,\vec{i} - T_0 x\,\vec{j}$$

Skisse. Bør ha med konturene



langs veggene, pluss noen til. Riktig retning på pilene. De skal peke i økende retning. Og så økes lengden på pilene med x- og y, men det er ganske små endringer. Pilene skal være vinkelrett på konturene.

Bruker $T_0 = 1$

Python/matlab skisse går bra.

2f) De to leddene representerer

$\rho c \vec{v} T$ - konvektiv varmestrøm

$\chi \nabla T$ - konduktiv - " -

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \oint_C (\rho c \vec{v} T - \chi \nabla T) \cdot d\vec{r}$$

$$= \oint_C \rho c \vec{v} T \cdot d\vec{r}$$

Gradienten faller bort siden sirkulasjonen av konservative felt er null. Stokes' teorem gir

$$\oint_C \rho c \vec{v} T \cdot d\vec{r} = \rho c \int_S \nabla \times (\vec{v} T) \cdot \vec{k} \, d\sigma$$

Tar sirkulasjonen mot klokka siden noe annet ikke er angitt.

Finner $\nabla \times (\vec{v} T)$

$$\vec{v} T = \overbrace{T_0 (2 - xy)}^{T} \varepsilon (x\vec{i} - y\vec{j})$$

$$\nabla \times (\vec{v}T) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ T\varepsilon x & -T\varepsilon y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= k\left(-\frac{\partial}{\partial x}(T\varepsilon y) - \frac{\partial}{\partial y}(T\varepsilon x)\right)$$

$$= k\varepsilon\left(-y\frac{\partial T}{\partial x} - T\frac{\partial y}{\partial x} - x\frac{\partial T}{\partial y} - T\frac{\partial x}{\partial y}\right)$$

$$= k\varepsilon\left(-y\cdot(-T_0 y) - x(-T_0 x)\right)$$

$$\nabla \times (\vec{v}T) = \underline{k\varepsilon T_0 (y^2 + x^2)}$$

Setter inn i Stokes' og integrerer over domenet

$$\rho c \int_S \nabla \times (\vec{v}T) \cdot k \, d\sigma = \rho c \int_1^2 \int_{-1/x}^{1/x} \varepsilon T_0 (y^2 + x^2) \, dy \, dx$$

$$= \rho c \varepsilon T_0 \int_1^2 \left(\frac{1}{3}y^3 + x^2 y\right)\Big]_{-1/x}^{1/x} dx$$

$$= \rho c \varepsilon T_0 \int_1^2 \frac{1}{3}x^3 + x + \frac{1}{3}x^3 + x \, dx$$

$$= \rho c \varepsilon T_0 \int_1^2 \frac{2}{3x^3} + 2x \, dx$$

$$= \rho c \varepsilon T_0 \left[\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) x^{-2} + x^2 \right]_1^2$$

$$= \rho c \varepsilon T_0 \left(-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1} \right) + 2^2 - 1^2 \right)$$

$$= \rho c \varepsilon T_0 \left(\frac{1}{4} + 3 \right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{13}{4} \rho c \varepsilon T_0}}$$