

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MEK1100 — Feltteori og vektoranalyse
Eksamensdag: Fredag 5. juni 2026
Tid for eksamen: 15.00 – 19.00
Oppgavesettet er på 6 sider.
Vedlegg: Formelark, 2 sider
Tillatte hjelpemidler: K. Rottmann: Matematiske Formelsamlung.
Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Løsningsforslag i blått.

Det er 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1

Et hastighetsfelt er gitt på dimensjonsløs form som

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}(x^2 - 1)y - \mathbf{j}x(y^2 - 1)$$

i kartesiske koordinater $\{x, y\}$. Vi har enhets koordinatvektorer $\mathbf{i}$ og $\mathbf{j}$ i henholdsvis x og y retning. I tillegg har vi koordinatvektor $\mathbf{k}$ i z -retningen som står vinkelrett på xy -planet.

a

Finn divergensen og virvlinga til $\mathbf{v}$.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}(2 - x^2 - y^2)$$

b

Undersøk om $\mathbf{v}$ har et hastighetspotensial ϕ , og finn i så fall hastighetspotensialet. Undersøk om $\mathbf{v}$ har en strømfunksjon ψ , og finn i så fall strømfunksjonen.

(Fortsettes på side 2.)

$\mathbf{v}$ har ikke et skalart hastighetspotensial ϕ fordi $\text{curl} \mathbf{v} \neq 0$.

$\mathbf{v}$ har en strømfunksjon ψ fordi feltet er todimensjonalt og divergensfritt.

Vi løser

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = x^2 y - y \quad \text{og} \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -xy^2 + x$$

som gir

$$\psi = \frac{1}{2} (-x^2 y^2 + x^2 + y^2) + c$$

hvor c er en vilkårlig konstant.

Det er like riktig om strømfunksjonen gis motsatt fortegn.

c

Finn sirkulasjonen C til vektorfeltet $\mathbf{v}$ rundt en sirkel med radius R rundt origo. La sirkulasjonen ha positiv retning mot klokka. Gjør dette både direkte ved et kurveintegral, og gjør det indirekte ved en annen type integral ved bruk av en passende integralsats. Si hvilken integralsats du bruker.

For direkte utregning ved kurveintegral, parametriser sirkelen ved $\mathbf{r}(\theta) = iR \cos \theta + jR \sin \theta$ for $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Vi har $d\mathbf{r} = (-iR \sin \theta + jR \cos \theta) d\theta$.

Direkte utregning gir

$$C = \oint_{x^2+y^2=R^2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} -2R^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + R^2 d\theta = 2\pi \left(R^2 - \frac{1}{4} R^4 \right)$$

Ved bruk av Stokes sats

$$C = \int_{x^2+y^2 \leq R^2} \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^R (2 - r^2) r dr d\theta = 2\pi \left(R^2 - \frac{1}{4} R^4 \right)$$

Man kan også bruke Greens sats som er et spesialtilfelle av Stokes sats.

d

Finn alle stagnasjonspunktene til hastighetsfeltet, og tegn dem inn i et plot som tjukke kulepunkter.

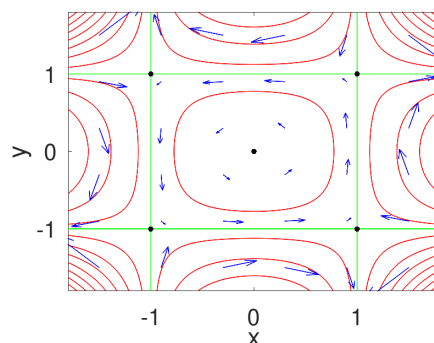
Finn alle strømlinjer som går igjennom stagnasjonspunktene, og tegn dem inn i det samme plottet som heltrukne linjer.

Tegn et passende antall vektor piler i det samme plottet for å antyde hvordan vektorfeltet oppfører seg.

Skisser et passende antall strømlinjer utenom de strømlinjene som går igjennom stagnasjonspunktene.

Stagnasjonspunkter $(x, y) \in \{(0, 0), (1, 1), (1, -1), (-1, -1), (-1, 1)\}$

Strømlinjene gjennom stagnasjonspunktene $x = 1$ og $x = -1$ og $y = 1$ og $y = -1$.



De fem stagnasjonspunktene med svarte kulepunkt

Strømlinjer gjennom stagnasjonspunktene

Noen strømlinjer utenom stagnasjonspunktene

Noen vektor piler

(Fortsettes på side 3.)

e

Finn partikkelakselerasjonen i hastighetsfeltet.

$$\frac{D\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

hvor

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

og

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \left[(x^2 - 1)y \frac{\partial}{\partial x} - x(y^2 - 1) \frac{\partial}{\partial y} \right] \mathbf{v} = (x^2 - 1)x(y^2 + 1)\mathbf{i} + (x^2 + 1)y(y^2 - 1)\mathbf{j}$$

Oppgave 2

Et vertikalt vindu er laget av glass med varmeledningstall k . Vinduet har tykkelse L , bredde B og høyde H . La x -aksen gå horisontalt gjennom vinduet slik at $x = 0$ er innsiden og $x = L$ er utsiden. La y -aksen være horisontal langs vinduet. La z -aksen være vertikal langs vinduet. På innsiden av vinduet er det behagelig varmt med temperatur $T(0, y, z) = T_i$. På utsiden av vinduet er det kaldt med temperatur $T(L, y, z) = T_u$. De to størrelsene T_i og T_u er konstanter. Det strømmer ikke luft gjennom vinduet. Vi forutsetter at temperaturen er stasjonær.

Regn ut temperaturen $T(x, y, z)$ i vindusglasset.

Finn varmekonduktiviteten i vindusglasset.

Finn den integrerte varmekonduktiviteten gjennom vinduet.

Dersom oppvarmingen på innsiden gjøres med elektrisk strøm som har pris P (en typisk enhet for P kan være kroner/kWh), finn et uttrykk for hvor mye varmekonduktiviteten gjennom vinduet koster i fyringsutgifter per tid.

Varmelikninga forenkles til Laplace likning $\nabla^2 T(x, y, z) = 0$ som reduserer seg til $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$ for $0 \leq x \leq L$ med randkrav $T(0) = T_i$ og $T(L) = T_u$.

Vi får $T(x, y, z) = a + bx$. Randkravene gir $a = T_i$ og $b = \frac{T_u - T_i}{L} = \frac{\Delta T}{L}$ hvor vi har satt $\Delta T = T_u - T_i$.

Varmeflukstettheten er gitt ved Fouriers lov

$$\mathbf{H}_l = -k \nabla T = -k \frac{\Delta T}{L} \mathbf{i}$$

Den integrerte varmekonduktiviteten ut av vinduet er $Q = \int \mathbf{H}_l \cdot \mathbf{n} d\sigma = -kBH \frac{\Delta T}{L}$ hvor vi har satt $\mathbf{n} = \mathbf{i}$.

Fyringsutgiftene per tid er QP .

Oppgave 3

I henhold til Newtons gravitasjonslov vil en observatør merke at tyngdens akselerasjon i nærheten av en punktmasse er

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{r^2} \mathbf{i}_r$$

(Fortsettes på side 4.)

Her er r avstanden fra punktmassen M til observatøren, enhetsvektoren $\mathbf{i}_r$ peker fra punktmassen M mot observatøren, og G er den universelle gravitasjonskonstanten.

I henhold til Gauss gravitasjonslov vil en observatør merke at tyngdens akselerasjon produsert av en kontinuerlig massefordeling er

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho$$

Her er den kontinuerlige fordelingen av masse gitt ved massetettheten ρ .

Vis hvordan du kan utlede Newtons gravitasjonslov fra Gauss gravitasjonslov.

Hint: Ei kule med radius r har volum $\frac{4}{3}\pi r^3$ og overflate $4\pi r^2$.

Det er fornuftig å anta kulesymmetri, og derfor benytte kulekoordinater (r, θ, φ) med origo i punktmassen. Videre er det fornuftig å anta at både massetettheten ρ og størrelsen til tyngdens akselerasjon g kun er funksjoner av radius r , og at tyngdens akselerasjon er rettet inn mot punktmassen, altså $\rho(r)$ og $\mathbf{g} = -g(r)\mathbf{i}_r$. Benytt et kontrollvolum V som er en ball med radius r rundt origo, avgrenset av et kuleskall S med radius r . Punktmassen er plassert i origo og er i sin helhet innenfor kontrollvolumet. Herfra er det mulig å benytte forskjellige framgangsmåter:

Framgangsmåte med bruk av Gauss sats:

Vi har antatt at g er konstant over kuleskallet S , fordi en punktmasse nødvendigvis er en kulesymmetrisk fordelt masse. Normalvektor til flaten S er $\mathbf{n} = \mathbf{i}_r$. Da får vi at integralet av høyre side av Gauss lov er

$$\int_V -4\pi G\rho \, d\tau = -4\pi G \int_V \rho \, d\tau = -4\pi GM$$

Integralen av venstre side av Gauss lov kan omformes ved Gauss sats

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{g} \, d\tau = \int_S \mathbf{g} \cdot \mathbf{i}_r \, d\sigma = -g \int_S d\sigma = -4\pi r^2 g$$

Følgelig har vi

$$g = \frac{GM}{r^2} \quad \text{og} \quad \mathbf{g} = -\frac{GM}{r^2} \mathbf{i}_r$$

Alternativ framgangsmåte uten bruk av Gauss sats:

Skriv Gauss lov med divergensen uttrykt ved hjelp av kulekoordinater

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (-r^2 g(r)) = -4\pi G\rho(r) \quad \text{som medfører} \quad \frac{\partial}{\partial r} (r^2 g(r)) = 4\pi G\rho(r)r^2$$

Volumintegralet av massetettheten ρ er lik massen M

$$\int_V \rho(r) \, d\tau = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \rho(r) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = 4\pi \int_0^r \rho(r) r^2 \, dr = M$$

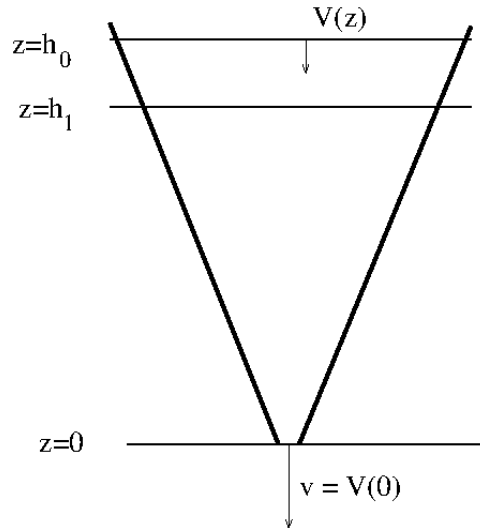
Følgelig har vi

$$g = \frac{GM}{r^2} \quad \text{og} \quad \mathbf{g} = -\frac{GM}{r^2} \mathbf{i}_r$$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 4

En trakt med sirkulært tverrsnitt er fylt opp med vann til en høyde $z = h_0$ over utløpet ved $z = 0$. Utløpet har radius $R = a$. Det sirkulære tverrsnittet til trakten har radius $R = a + bz$ hvor z er høyden over utløpet.



Vannet vil renne ut gjennom utløpet ettersom tyngdens akselerasjon g drar vannet nedover. Vannet har konstant tetthet ρ og er i kontakt med luft som har konstant trykk p_0 både øverst ved den frie overflaten og nederst ved utløpet.

a

Gitt at R og z har fysisk dimensjon lengde, hva er de fysiske dimensjonene til konstantene a og b ?

a har dimensjon lengde, b er dimensjonsløs

b

Vi antar at den vertikale hastighetskomponenten V er konstant over hvert tverrsnitt $z = \text{konstant}$. Finn relasjonen mellom $V(z)$ ved en vilkårlig høyde z og $V(0)$ ved utløpet.

Merk at denne oppgaven har ikke noe med fri overflate eller trykk å gjøre! Det står ikke i oppgaven at tverrsnittet $z = \text{konstant}$ er ved den frie overflaten!

Denne oppgaven har med kontinuitetslikninga, eller alternativt prinsippet om at masse er bevart å gjøre. Ettersom vann er inkompressibelt blir dette et krav om at hastighetsfeltet er divergensfritt, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Dersom vi integrerer dette over et passende kontrollvolum, og bruker Gauss sats, får vi at den integrerte fluksen gjennom enhver høyde z må være like stor, $V(z)\pi R^2 = \text{konstant}$. Det burde være tilstrekkelig å sette opp følgende likninger

$$V(z)\pi(a + bz)^2 = V(0)\pi a^2 \quad \text{eller} \quad V(0) = V(z)\frac{(a + bz)^2}{a^2}$$

(Fortsettes på side 6.)

c

Hvor lang tid tar det for vannet å renne ut slik at høyden til den frie overflaten reduseres fra $z = h_0$ til $z = h_1 < h_0$?

Gjør rede for alle tilnærminger du gjør!

Hint: Du kan anta at $bz \gg a$ for $h_0 \geq z \geq h_1$ slik at du kan forenkle diverse uttrykk som for eksempel $a + bz \approx bz$.

Det er naturlig å anta at hastighetsfeltet er nesten stasjonært i løpet av den tiden det tar å redusere høyden fra h_0 til h_1 .

Antakelsen om at hastighetsfeltet er stasjonært medfører at vi kan bruke Bernoullis likning. Se på en strømlinje fra et sted på den frie overflaten til et sted på utløpet

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{V^2(z)}{2} + gz = \frac{p_0}{\rho} + \frac{V^2(0)}{2}$$

som kan skrives

$$\frac{V^2(z)}{2} \left[\left(\frac{a + bz}{a} \right)^4 - 1 \right] = gz$$

som kan tilnærmes med

$$\frac{V^2(z)}{2} \left(\frac{bz}{a} \right)^4 = gz \quad \text{eller} \quad V(z) = \sqrt{2gz} \left(\frac{a}{bz} \right)^2 = \sqrt{2g} \left(\frac{a}{b} \right)^2 z^{-\frac{3}{2}}$$

Synkehastigheten til den frie overflaten er $\frac{dz}{dt} = -V(z)$, så vi må løse ei separabel differensiallikning

$$\int_{h_0}^{h_1} z^{\frac{3}{2}} dz = - \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2g} \left(\frac{a}{b} \right)^2 dt$$

som gir

$$\frac{2}{5} \left(h_1^{\frac{5}{2}} - h_0^{\frac{5}{2}} \right) = -\sqrt{2g} \left(\frac{a}{b} \right)^2 (t_1 - t_0)$$

og derfor

$$t_1 - t_0 = \frac{2}{5\sqrt{2g}} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \left(h_0^{\frac{5}{2}} - h_1^{\frac{5}{2}} \right)$$