

PRØVEKSAMEN MEK1100 MAI 2004

Det er tilsammen 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum 0-10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1. I todimensjonalt (plant) kartesisk koordinatsystem (x, y) er et gitt en skalarfunksjon $\psi = \psi(x, y)$ og et vektorfelt

$$\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla \psi$$

Enhetsvektoren \mathbf{k} står normalt på xy -planet. Enhetsvektorene langs x og y aksen er henholdsvis \mathbf{i} og \mathbf{j} .

- a) Finn komponentene av vektoren $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ langs x og y aksen. Vis at vektoren \mathbf{v} er divergensfri.
- b) Vis at vektoren \mathbf{v} er rettet langs (tangent til) ekviskalarlinjene for funksjonen ψ .
- c) Innfør plane polarkoordinater r, θ med tilhørende enhetsvektorer \mathbf{i}_r og \mathbf{i}_θ . Finn komponentene for vektoren $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta)$ i polarkoordinatsystemet.

Formel:

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta$$

Oppgave 2. Vi skal se på to strømfelter fra potensialteorien som henholdsvis er gitt ved følgende uttrykk for strømfunksjonen (feltfunksjonen) i kartesiske koordinater (x, y) .

$$\psi_1 = Uy$$

$$\psi_2 = -\frac{a^2 U y}{x^2 + y^2}$$

hvor U og a er konstanter.

- a) Gi navnene på disse to feltene og forklar kort hva de representerer.
- b) Forklar hvorfor funksjonen $\psi = \psi_1 + \psi_2$ også oppfyller betingelsene for å være strømfunksjon i potensialstrøm.
- c) Innfør plane polarkoordinater r, θ hvor θ er vinkelen med x -aksen og r er avstand fra origo. Finn utrykket for ψ i polarkoordinater og bestem komponentene av strømvektoren i polarkoordinater $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta)$. Hva blir strømkomponentene langs kurven $r = a$?

Oppgave 3. For å beskrive luftstrømmen over flatt terreng innfører vi et rettvinklet kartesisk koordinatsystem med x og y -aksene horisontalt langs bakken og z -aksen rettet vertikalt oppover. Enhetsvektorene langs aksene er henholdsvis \mathbf{i} , \mathbf{j} og \mathbf{k} . Luftstrømmen (vinden) er rettet i x -retning og øker i høyden. Vindvektoren kan skrives

$$\mathbf{v} = \frac{u_o}{h} z \mathbf{i}$$

hvor u_o og h er konstanter. Temperaturen i lufta avtar oppover etter formelen

$$T = T_o - \frac{T_o}{h} z$$

hvor T_o er temperaturen ved bakken. Varmefluksen (varmestrømmen) i lufta per flateenhet og tidsenhet er

$$\mathbf{H} = \rho c \mathbf{v} T - k \nabla T$$

- a) Definer alle størrelser som inngår i formelen for varmefluksen og forklar kort hva de to leddene på høyre side i uttrykket står for.
- b) Skriv opp det generelle uttrykket for hele varmefluksen per tidsenhet gjennom en flate σ . Normalvektoren til flata er \mathbf{n} ,
- c) Beregn varmefluksen (H_z) gjennom en flate A i xy -planet med sidekanter b og h .
- d) Beregn varmefluksen (H_x) gjennom en flate B i yz -planet med sidekanter i $z = 0$ og $z = h$ og bredde b .