

PRØVEKSAMEN MEK1100 MARS 2004 (MIDTVEIS)

Det er tilsammen 20 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum 0-5 (5 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1. En vektor \mathbf{F} som representerer en kraft er gitt i et kartesisk koordinatsystem x, y ved $\mathbf{F} = -ax\mathbf{i} - ay\mathbf{j}$ hvor a er en konstant og enhetsvektorene i x - og y -retning er henholdsvis \mathbf{i} og \mathbf{j} .

- Skisser kraftfeltet ved å tegne noen vektorer i feltet.
- Finn størrelse (lengden) av vektoren \mathbf{F} og skisser ekviskalarlinjene for størrelsen.
- Kraften kan skrives $\mathbf{F} = -\nabla V$. Bestem potensialfunksjonen V .
- Forklar hvorfor linjeintegralet $W = \int_{\lambda} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ langs en kurve λ i xy -planet representerer arbeidet som kraften utfører når partikkel flytter seg langs kurven (veien). Det vektorielle bueelement langs kurve er $d\mathbf{r}$.
- Regn ut arbeidet når veien (λ) utgjør x -aksen fra $x=0$ til $x=b$.
- Hva blir arbeidet om partikkelen flytter seg langs en annen vei fra samme startsted til samme sluttsted som i e) ? Begrunn svaret.

Oppgave 2. Vi skal regne med to vektorfelt

$$\mathbf{v}_1 = xy\mathbf{i} + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{v}_2 = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$$

hvor x, y og z er kartesiske koordinater og \mathbf{i}, \mathbf{j} og \mathbf{k} er de respektive enhetsvektorene.

- Skisser vektorfeltet \mathbf{v}_1 ved å tegne noen vektorer på koordinataksene og ellers i feltet.
- Finn divergensen $\nabla \cdot \mathbf{v}_1$.
- Finn virvlingen $\nabla \times \mathbf{v}_1$.
- Hvorfor eksisterer det en strømfunksjon (feltfunksjon) for vektorfeltet \mathbf{v}_1 ?
- Finn strømfunksjonen ψ_1 .
- Tegn strømlinjene (feltlinjene) $\psi_1 = 0$ inn på plottet i a).
- Finn divergensen til vektorfeltet $\nabla \cdot \mathbf{v}_2$.
- Finn virvlingen til vektorfeltet $\nabla \times \mathbf{v}_2$.
- Hvorfor eksisterer det ikke en strømfunksjon (feltfunksjon) for feltet \mathbf{v}_2 ?

Oppgave 3. Gitt et 3-dimensjonalt vektorfelt $\mathbf{v} = -2x\mathbf{i} + (2y + x)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ i et kartesisk koordinatsystem xyz med enhetsvektorer \mathbf{i}, \mathbf{j} og \mathbf{k} .

- a) Skriv opp (uten bevis) Stokes sats og definer størrelsene som inngår.
- b) Beregn sirkulasjonen, C , av vektoren \mathbf{v} omkring en sirkel i xy -planet med radius r og sentrum i origo.
- c) Beregn sirkulasjonen, C , av vektoren \mathbf{v} omkring en sirkel i xz -planet med radius r og sentrum i origo.
- d) Skriv opp (uten bevis) Gauss sats og definer størrelsene som inngår.
- e) Beregn vektorfluksen (volumstrømmen), Q , av vektoren \mathbf{v} gjennom overflaten av en sirkulær skive i xy -planet med radius r og sentrum i origo. Tykkelsen av skiva er h .