Fasit for avsluttende eksamen i MEK1100 gitt 11 juni 2014

Oppgave 1

1a $A \sim$ K, $B \sim$ K, $\kappa \sim$ m^2/s, $k \sim$ J/(msK) og $\boldsymbol{H} \sim$ J/(m^{2}s).

Størrelsen $\boldsymbol{v}$ er konveksjonshastigheten i lufta. Ved tiden $t = t_0$ vet vi at lufta står i ro og da er $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

Regn ut gradienten til T, beregnet på et vilkårlig sted på gulvet,

$$\nabla T(x, y, 0) = \frac{B\pi}{H} \sin(\frac{\pi x}{L}) \sin(\frac{\pi y}{L})\boldsymbol{k}$$

og observer at denne peker rett opp. Myggen må fly rett opp.

1b Vi regner ut $\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T = -\kappa B \pi^2 (\frac{2}{L^2} + \frac{1}{H^2}) \sin(\frac{\pi x}{L}) \sin(\frac{\pi y}{L}) \sin(\frac{\pi z}{H})$. Dette uttrykket er negativt alle steder innenfor vegger, gulv og tak. Uttrykket er null på vegger gulv og tak. Følgelig vil teperaturen avta overalt inni rommet, og vil holde seg konstant på vegger, gulv og tak.

1c Bruk Gauss sats

$$Q = \int_{\text{vegger, gulv og tak}} -k\nabla T \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = -k \int_{\text{hele rommet}} \nabla^2 T \, d\tau = \frac{8kL^2HB}{\pi} (\frac{2}{L^2} + \frac{1}{H^2})$$

Oppgave 2

(se beskrivelsen av eksperimenter vi har gjort i løpet av våren)

2a

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \frac{A}{2r\sqrt{r}} \boldsymbol{k}$$

2b Vektorfeltet er 2D og divergensfritt, følgelig har det en strømfunksjon.

$$\psi = 2A\sqrt{r} + C$$

Feltet er ikke virvelfritt og har ikke et potensial.

2c Strømlinjene er sirkler rundt z-aksen, $r =$ konstant og $z =$ konstant.

Feltet har ingen stagnasjonspunkter.

Alle punkter langs z-aksen er singulære punkter.

2d Akselerasjonen er konvektiv

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\frac{A^2}{r^2} \boldsymbol{i}_r$$

2e Bernoullis likning krever ideelt fluid (ingen friksjon), konstant tetthet, og stasjonært hastighetsfelt. Da er $p/\rho + v^2/2 + gz$ konstant langs en strømlinje.

Vi merker oss at vårt vann i strømvirvelen tilfredsstiller alle disse kravene, derfor har vi at trykket er konstant langs en strømlinje, dvs. trykket er konstant langs en sirkel rundt z-aksen.

Dette er ikke tilstrekkelig for å bestemme trykket som funksjon av avstand fra rotasjonsaksen!

2f Sett inn i Eulerlikninga og løs

$$p = B - \rho g z - \frac{\rho A^2}{r}$$

hvor B er en konstant.

Den frie overflaten finner vi der hvor vanntrykket er lik lufttrykket, $p = p_0$,

$$z = \frac{B - p_0}{\rho g} - \frac{A^2}{gr}$$

Oppgave 3

(se oppgave 10.9 i kompendiet og beskrivelsen av eksperimenter vi har gjort i løpet av våren)

Vi løser oppgaven ved hjelp av Bernoullis likning, denne anvender vi langs en strømlinje fra overflaten til innsjøen A, gjennom røret, og ut i tappepunktet C. Vi kan med god tilnærming sette $v = 0$ i overflaten til innsjøen fordi den antas å være stor i forhold til mengden vann som tappes. Trykket er lik lufttrykket p_0 både ved overflaten til innsjøen og ved tappepunktet. Bruker vi Bernoullis likning ved A og ved C får vi

$$\frac{p_0}{\rho} + gh = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v^2}{2}$$

så $v = \sqrt{2gh}$.

Fluksen i røret blir

$$Q = Sv = S\sqrt{2gh}$$

hvor S er arealet til tverrsnittet.