Løsningsforslag for noen av oppgavene i deleksamen i MEK1100 gitt 25 mars 2014

Oppgave 2

For å regne ut arbeidet må vi regne ut kurveintegralet

$$W = \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Vi har oppgitt at legemet går med konstant fart langs ei rett linje fra origo til punktet $\boldsymbol{r}_a = a(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$ i løpet av ei tid T. Det kan da være naturlig å bruke tiden som har gått siden vi forlot origo som parameter for kurven

$$\gamma : \boldsymbol{r}(t) = \frac{t}{T}\boldsymbol{r}_a = \frac{ta}{T}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) \qquad \text{for} \quad 0 \le t \le T.$$

Vi har

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{1}{T}\boldsymbol{r}_a \, \mathrm{d}t = \frac{a}{T}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) \, \mathrm{d}t \qquad \text{for} \quad 0 \le t \le T.$$

Hastigheten er den tidsderiverte av posisjonen

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{T}\boldsymbol{r}_a = \frac{a}{T}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}).$$

Krafta er

$$\boldsymbol{F} = -\mu\boldsymbol{v} = -\frac{\mu}{T}\boldsymbol{r}_a = -\frac{\mu a}{T}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}).$$

Skalarproduktet blir

$$\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v} = -\frac{\mu t a^2}{T^2}(1 + 1) \, \mathrm{d}t.$$

Arbeidet er

$$W = \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^T -\frac{2\mu t a^2}{T^2} \, \mathrm{d}t = -\frac{2\mu a^2}{T}.$$