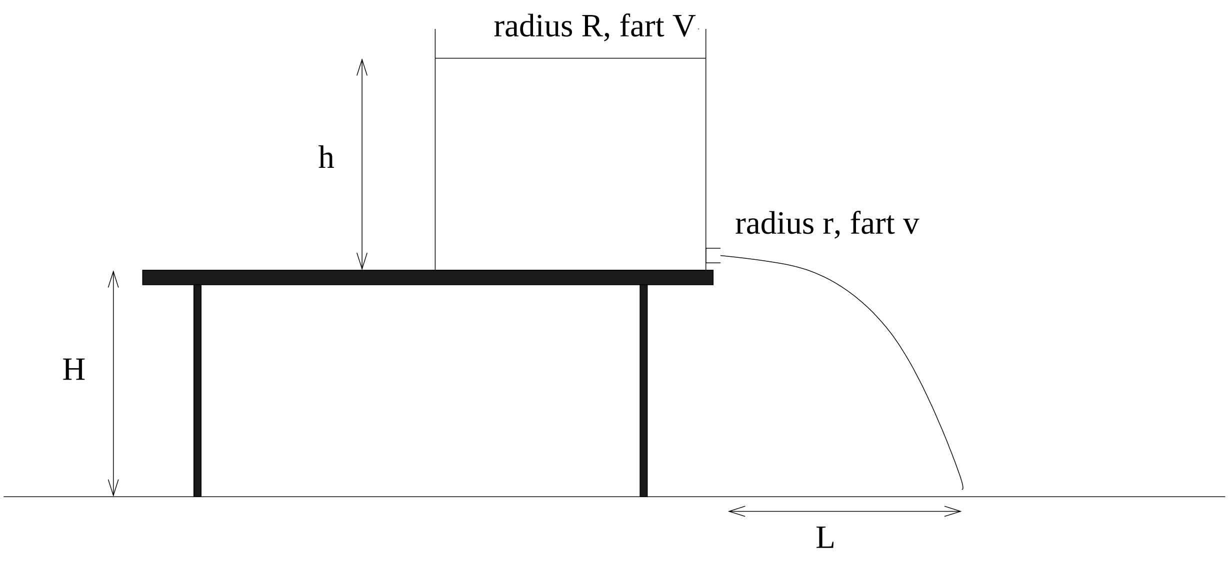
Oblig 2 MEK1100, vår 2014

Krav til innlevering og godkjenning

Hver av oppgavene har delpunkter som kan gi maksimalt 10 poeng hver. Det er 12 ordinære delpunkter, som tilsvarer maksimalt 120 ordinære poeng sammenlagt. Det er i tillegg ett ekstra delpunkt som kan gi 10 bonuspoeng. Det kreves minimum 70 prosent (84 poeng) riktig for å få godkjent. Dersom dette ikke er innfridd ved innlevering, men besvarelsen vurderes som et seriøst forsøk, kan det gis anledning til ny innlevering. For nærmere informasjon om regler se
`http://www.mn.uio.no/math/studier/admin/obligatorisk-innlevering/`
Tidsfrister er gitt på semestersidene til MEK1100.

Det er tillatt å samarbeide i grupper om den obligatoriske oppgaven. Likevel må alle levere en individuell besvarelse. På denne besvarelsen skal navnene på de man har samarbeidet med angis.

1 Tømme vann ut av et kar



Skissen ovenfor viser et bord som står på et gulv. Bordplata har en høyde H over gulvet. På bordet står et åpent sylinderformet kar med innvendig radius R. Karet er fylt opp med vann til en høyde h over bordet. Nederst på siden av karet er det en sylinderformet tut med innvendig radius r. Vi kan trygt anta at $r \ll R$. Tuten peker horisontalt vekk fra bordet og vi skal tenke oss at tuten har høyde H over gulvet. Vannet renner ut av tuten med utløpsfart v, faller i en krum bane, og lander på gulvet i en horisontal avstand L fra tuten. Etterhvert som vannet renner ut av karet så vil vannoverflaten inni karet synke med synkefarten V. Tyngdens akselerasjon er g og virker rett ned. Lufttrykket er p_0 og er konstant over alt. Tettheten til vannet er ρ og er også konstant.

a) Synkefarten V er relatert til utløpsfarten v i henhold til prinsippet om massebevaring. Forklar hvordan dette prinsippet anvendes her, og finn relasjonen mellom de to fartene.

b) Synkefarten V er relatert til tidsavhengigheten til vannhøyden h ved en derivert. Finn relasjonen mellom V og h.

c) Forklar betingelsene for å kunne bruke Bernoullis likning, og diskuter i hvilken grad vi kan bruke Bernoullis likning for å bestemme tømmingen av karet.

d) Bruk Bernoullis likning for å bestemme utløpsfarten v uttrykt ved vannhøyden h.

e) Regn ut den horisontale avstanden L uttrykt ved vannhøyden h.

f) Ved å benytte resultatene ovenfor kan vi skrive ei differensiallikning for vannhøyden h på formen

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \alpha\sqrt{h}$$

hvor α må bestemmes. Denne differensiallikninga er lett å løse fordi den er separabel. Løs likninga og tegn grafen til $h(t)$ som viser hvordan vannstanden endrer seg som funksjon av tid. Hvor lang tid det tar å tømme et kar med opprinnelig vannhøyde h_0? Tegn grafen til $L(t)$ som viser hvordan strålen endrer nedslagspunkt som funksjon av tid.

Ekstra oppgave som kan gi bonuspoeng: I virkeligheten har vi brutt en av forutsetningene for å kunne bruke Bernoullis likning ettersom farten ikke er konstant i tid. Vi kan vurdere hvor stor feil vi har begått ved å substituere den løsningen vi har funnet tilbake inn i den opprinnelige Euler-likninga som var utgangspunktet for å utlede Bernoullis likning. Hvor stort er det tidsderiverte leddet i forhold til et annet typisk ledd, som for eksempel tyngdens akselerasjon g?

2 Varmeledningslikning og numerisk løsning

Vi skal studere temperaturen $T(x^*, t^*)$ i en stav med lengde L og varmediffusivitet κ. Ved tiden $t^* = 0$ holder staven temperatur T_0. For etterfølgende tider $t^* > 0$ holdes venstre ende av staven stadig på temperatur T_0, mens høyre ende av staven holdes på en høyere temperatur $T_1 > T_0$. Stjerne-merkede variabler benyttes her for å minne oss om at disse variablene har fysisk dimensjon. Problemet kan stilles opp slik:

$$\frac{\partial T}{\partial t^*} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^{*2}} \qquad \text{for} \quad 0 \le x^* \le L \quad \text{og} \quad t^* > 0$$

$$T(x^*, 0) = T_0 \qquad \text{for } 0 \le x^* \le L$$

$$T(0, t^*) = T_0 \qquad \text{og} \qquad T(L, t^*) = T_1 \qquad \text{for } t^* > 0$$

a) Skalering

Ved å innføre nye skalerte og dimensjonsløse variabler

$$u = \frac{T - T_0}{\alpha} \qquad t = \frac{t^*}{\beta} \qquad x = \frac{x^*}{\gamma}$$

kan vi omforme problemet til normalisert form som vist nedenfor. I det følgende skal vi jobbe videre med denne normaliserte formen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{for} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{og} \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0 \qquad \text{for} \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0, t) = 0 \qquad \text{og} \qquad u(1, t) = 1 \qquad \text{for} \quad t > 0$$

Bestem verdiene til α, β og γ.

Hint: Ved hjelp av kjerneregelen for derivasjon har vi for eksempel

$$\frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{\partial t}{\partial t^*}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial t}$$

b) Likevektsløsning

Med en "likevektsløsning" mener vi en løsning som ikke avhenger av tid, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, denne løsningen skal vi betegne $u = U(x)$. Finn likevektsløsningen for det normaliserte problemet.

c) Den generelle løsningen nærmer seg likevektsløsningen

Definer $\theta = u - U$. La $I(t) = \displaystyle\int_0^1 \theta^2 \, \mathrm{d}x$. Vis at $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \leq 0$.

Hint: Se på eksempel 8.1 i boka, og gjennomfør en én-dimensjonal utgave av det eksemplet.

Kan vi fra dette konkludere at løsningen til u vil nærme seg likevektsløsningen som vi fant i forrige punkt?

I resten av denne oppgaven skal vi få et inntrykk av hvor fort og hvordan løsningen nærmer seg likevektsløsningen.

d) Numerisk diskretisering

Vi skal diskretisere løsningen som $u_{m,n} = u(x_m, t_n)$ hvor $m = 1, \ldots, M$ og $t_n = n\Delta t$ hvor $n = 0, 1, 2, \ldots$. I Matlab lar vi **x=linspace(0,1,M)** for jevnt fordelte punkter x_m i intervallet $[0, 1]$ med $\Delta x = \frac{1}{M-1}$.

Førstederivert med hensyn på tid skal vi tilnærme med differensformelen

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{m,n} \approx \frac{u_{m,n+1} - u_{m,n}}{\Delta t} \tag{1}$$

Andrederivert med hensyn på rom skal vi tilnærme med differensformelen

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{m,n} \approx \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} \tag{2}$$

Vis ved Taylor-utvikling at feilen i likning (1) er av størrelsesorden Δt. Finn ut av hvilken størrelsesorden feilen i likning (2) er.

e) En numerisk metode

Ved å sette likningene (1) og (2) sammen får vi følgende *eksplisitte* skjema

$$u_{m,n+1} = ru_{m+1,n} + (1-2r)u_{m,n} + ru_{m-1,n}$$

hvor $r = \dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$. På semestersiden kan du laste ned ei fil `varmeledning.m` som bruker dette skjemaet og som i tillegg sørger for å oppfylle randkravene.

Lag et skript `Ttest.m` som kaller opp **u = varmeledning(ustart, 0, 1, N, r)** og som plotter opp temperaturprofilen for $u(x,t)$ som funksjon av x for noen utvalge tider t, for eksempel $t \in \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$. Velg startverdien **u = zeros(1,M)**. Velg for eksempel $M = 10$ og $N = 20$. Legg merke til at $\Delta t = 0.1/N$ for de nevnte tidene.

Vi må være forsiktig med verdien til parameteren r. Vis at dersom Δt blir så stor i forhold til Δx at $r > 0.5$, så kan den numeriske løsningen bli ustabil og få urealistiske verdier. Vis også at dersom Δt er tilstrekkelig liten at $r < 0.5$, så vil den numeriske løsningen konvergere mot likevektsløsningen.

f) Karakteristisk tid for konvergens mot likevektsløsning

Forhåpentligvis har forrige oppgavepunkt tjent til å overbevise om at temperaturprofilen praktisk talt har konvergert mot likevektsprofilen etter en dimensjonsløs tid $t \approx 0.5$. Nå skal vi oversette dette til fysisk virkelighet:

Uttrykk den tilsvarende karakteristiske fysiske tiden t^* uttrykt ved tykkelsen L og varmediffusiviteten κ.

I tabell 10.1 i kompendiet finner du varmediffusiviteter for fire forskjellige stoffer. Bruk disse varmediffusivitetene, anta tykkelsen er $L = 10$cm, og regn ut karakteristiske tider i sekunder.

Merk: Denne utregningen er høyst urealistisk for luft og vann fordi disse to stoffene er flytende og vil tillate konveksjon som vi ikke har tatt hensyn til her!